



Tehnici de transmisiune - Modulații digitale

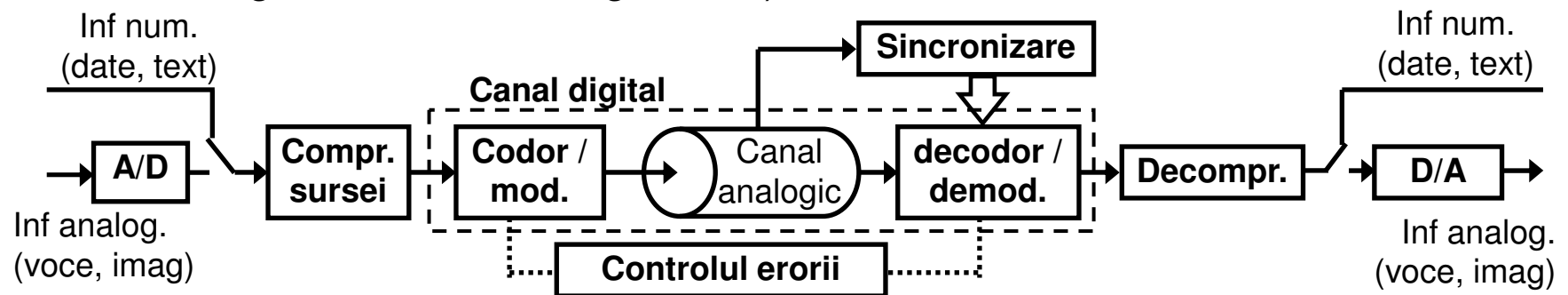
Capitolul 1

Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Transmisiuni digitale – semnal informațional digital;

▣ Sursele de informație:

- Discrete: fișiere , text, etc;
 - codarea sursei - reprezentarea digitală a informației discrete;
 - compresie - minimizează cantitatea necesară pentru transmisa informației; (operație distinctă, compr. fără pierderi);
- Analogice: semnalul vocal, semnalul video, imagini fixe, etc;
 - Digitizarea informației (eșantionare, cuantizare);
 - Compresia cu sau fără pierderi (uneori se realizează în domeniul analogic sau odată cu digitizarea);





Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Codarea (reprezentarea) digitală a informației

▪ Text

- Cod ASCII – 7 biți/caracter (American Standard Code for Information Interchange) ;
- Cod ECBDIC - 8 biți/caracter (Extended Binary Coded Decimal Interchange Code) ;
- Unicode - 16 biți/caracter (suport Java, XML);

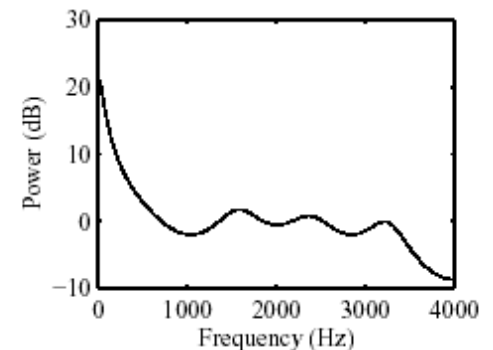
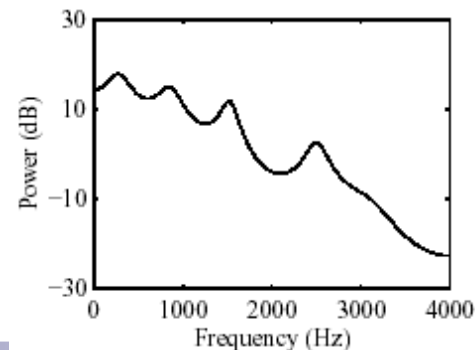
Obs: - există și coduri pentru a “coda” informația binară în format text (reprezentabil prin caractere) – utilizabile în sistemele orientate pe text (e-mail):

- **HEX: poate fi citit de om;**
- **Base64 (MIME): 3 octeți codificați în 4 caractere printabile;**
- **Base32 : 5 octeți codificați în 8 caractere printabile;**

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Codarea digitală a semnalelor vocale

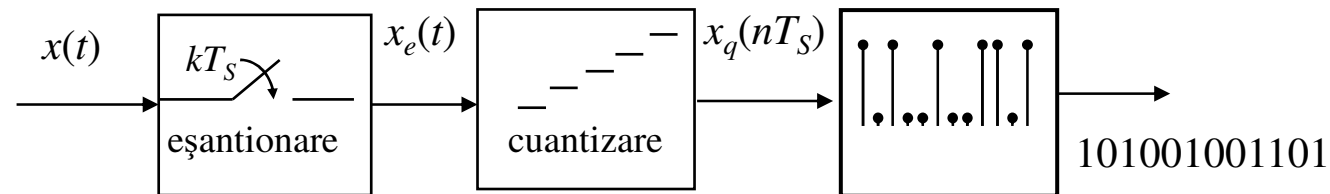
- Semnalul vocal
 - În frecvență: banda de frecvențe 0,3-3,4kHz; Alte semnale: vorbire de bandă largă (50Hz-7kHz), audio bandă medie (10Hz-11kHz), audio bandă largă (10Hz-22kHz);
 - Caracterizare statistică pentru sinteză (obținut prin prelucrarea unui semnal folosind un sistem dinamic)
 - În frecvență are armonici (multipli fundamentalei f_0) pentru vocale;
 - Anvelopa spectrului prezintă vârfuri – *formanți*;
 - Descrierea perceptuală a sunetului – *foneme*:
 - Sonore (vocale) – semnal cvasiperiodic;
 - Nesonore (consoane: plozive, ocluzive, etc) – asemănător cu un zgomot alb;
 - Este cvasistaționar pe segmente de 10-20 ms;
 - Autocorelația dintre segmente succesive are valori mari (0.8 – 0.9);



Tehnici de transmisiune digitală a informației

▣ Codarea digitală a semnalelor vocale

- Codarea formai de undă în timp
 - Eșantionare (uniformă);
 - Cuantizare (uniformă sau neuniformă – cu compandare);



▪ Eșantionarea

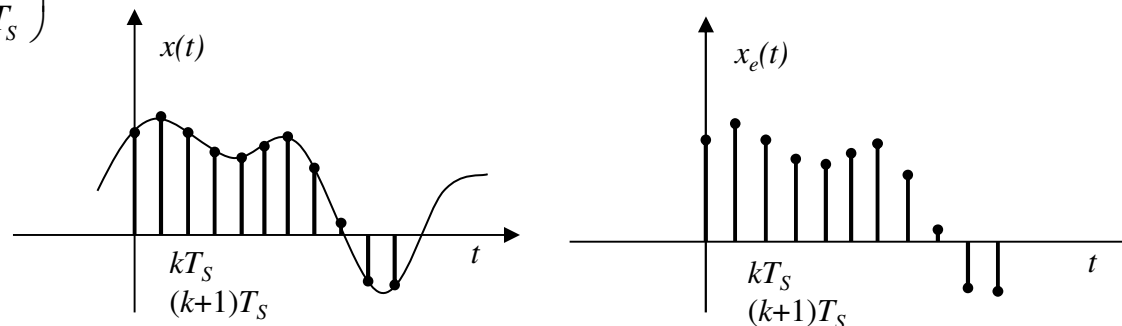
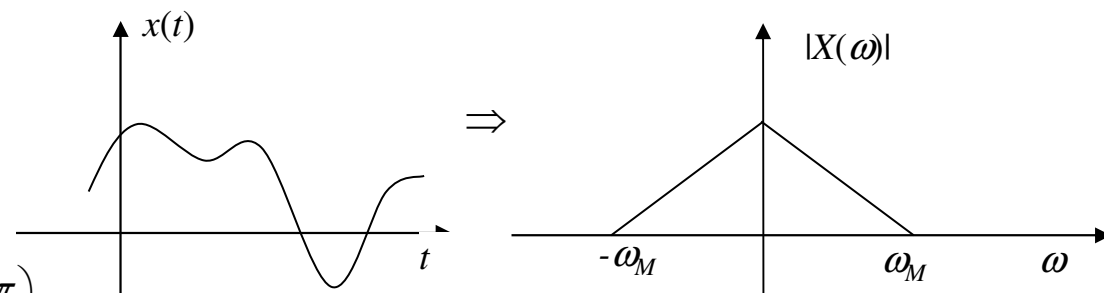
- semnalul analogic $x(t)$ un semnal de bandă limitată;
- semnalul $x(t)$ eșantionat ideal cu perioada T_s

$$x_e(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_n$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Eșantionarea ideală

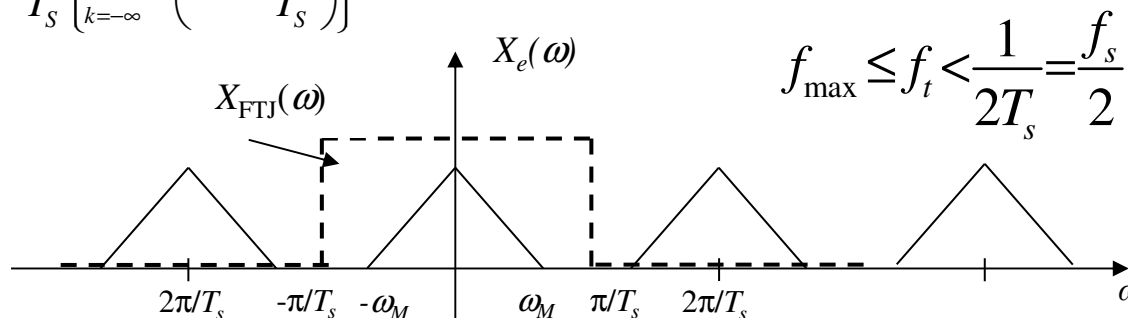
$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s)\right\} = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right)$$



$$X_e(\omega) = \mathcal{F}\{x_e(t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T_s} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T_s}\right) \right\}$$

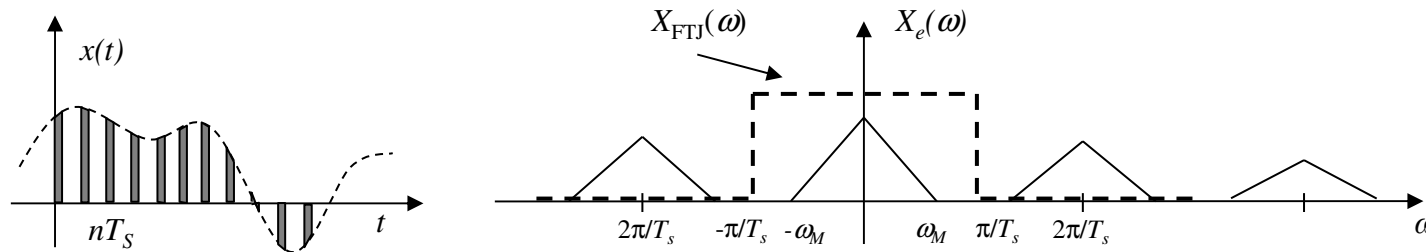
Teorema eșantionării

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$

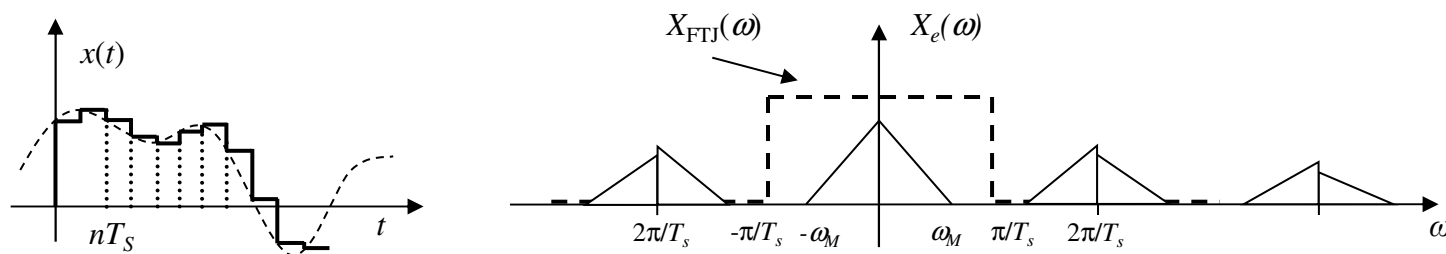


Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Eșantionarea naturală



□ Eșantionarea uniformă (cu memorie)



Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Cuantizarea

- Uniformă – pas de cuantizare constant;
- Neuniformă - pas de cuantizare variabil (mic pt valori mici și mare pt valori mari ale semnalului)

- Legea μ

$$V_{out}(nT_s) = \frac{\ln(1 + \mu |V_{in}(nT_s)|)}{\ln(1 + \mu)}, \quad \mu = 255$$

- Legea A

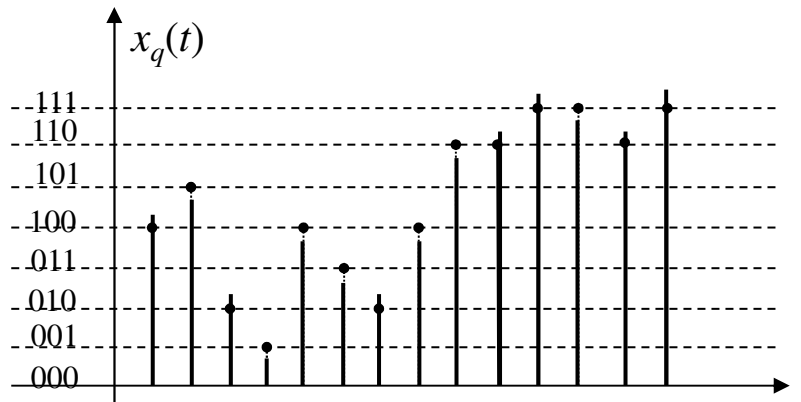
$$\begin{cases} V_{out}(nT_s) = \frac{A \cdot |V_{in}(nT_s)|}{1 + \ln(A)} & \text{pentru } 0 \leq |V_{in}(nT_s)| \leq \frac{1}{\ln A} \\ V_{out}(nT_s) = \frac{1 + \ln(A \cdot |V_{in}(nT_s)|)}{1 + \ln(A)} & \text{pentru } \frac{1}{\ln A} \leq |V_{in}(nT_s)| \leq 1 \end{cases}$$

Cuantizare pe 8 biți (1 semn + 7 modulul) ; pentru semnale mici – zgomot
→ cuantizare pe 13 biți.

Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Codarea eșantioanelor

- Unipolară: binar natural;
- Bipolară: binar deplasat, complement față de 2, etc



⇒ 100 101 010 001 100 011 010 110 110
111 111 110 111 ...

Sucesiunea de biți care reprezintă eșantioanele semnalului

Format		Banda semnalului (Hz)	Frecvență de eșantionare $F_S=1/T_S$ (kHz)	Rezoluție a eșantioanelor (b/eșant.)	Rată binară de transfer R_b (kb/s)
Voce de calitate telefonică		200 - 3400	8	8	64
Voce de calitate radio AM		50 - 7000	16	8	128
		50 - 7000	16	16	256
Audio HiFi	(calitate radio FM)	20 - 15000	32	16	1024
Stereo HiFi	(calitate CD-ROM)	10 - 20000	44,1	16	1411,2
	(calitate DAT)	10 - 20000	48	16	1536

Tehnici de transmisiune digitală a informației

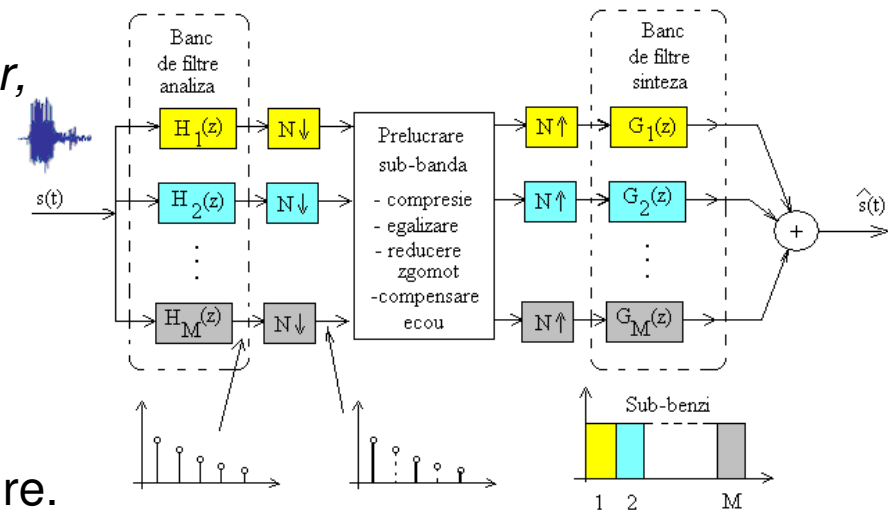
□ Compresia (codarea) semnalului vocal

- Eliminarea pauzelor (în timp: VAD – voice activity detector);
- Codare entropică (exploatează corelațiile dintre eșantioane): DPCM, delta, delta adaptiv, etc;
- Codare perceptuală (se elimină componentele nepercepute de urechea umană);
- Codarea în domeniul frecvență:

- Codarea transformatei (FT, DCT, sau MDCT) se determină *Transformata Fourier*, *Cosinus discretă*, *Cosinus discretă modificată*, și se transmit coeficienții cuantizați.

- Codarea pe sub-benzi

Semnalul filtrat cu banc de filtre (M filtre FTB) și transmisii parametrii de ieșire.



Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Codarea liniar predictivă (utilizată în comunicațiile mobile)

(analiză prin sinteză):

- Codare RPE-LPT

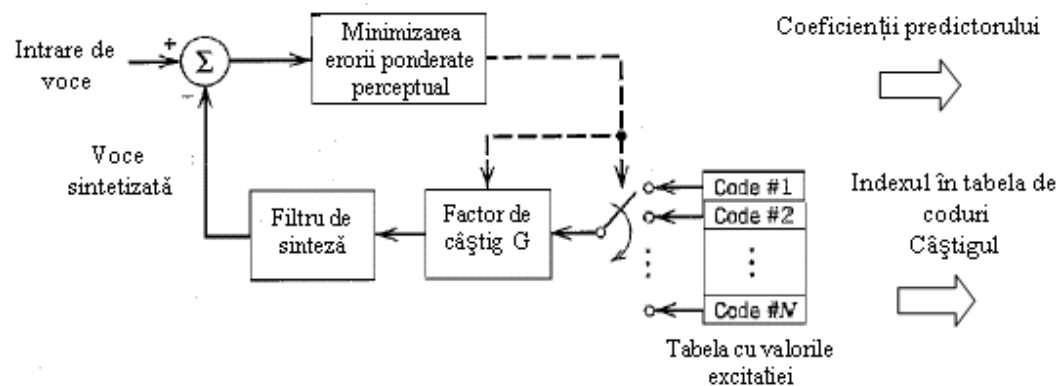
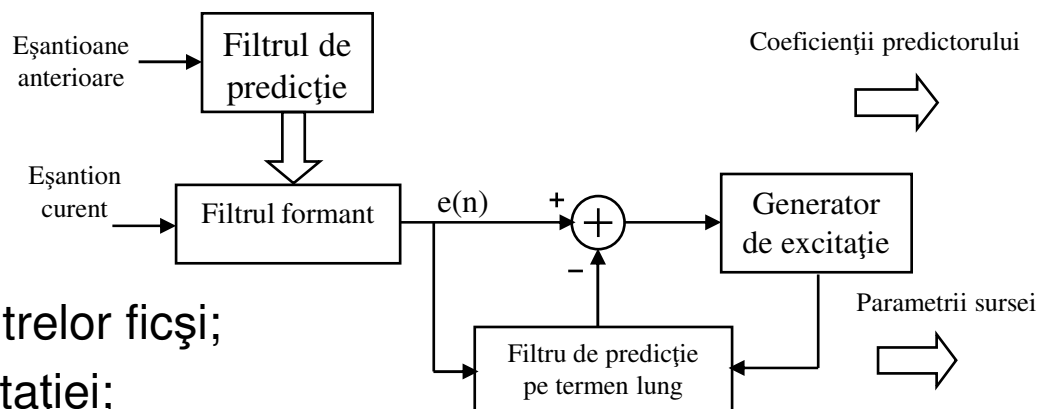
(Codare liniar predictivă cu excitație cu impuls multiplu)

- un cadru 10-30ms: coeficienții ai filtrelor ficși;
- Un subcadru 5-15ms: valorile excitației;
- Rate binare <16kbps;

- Codare CELP (în CDMA-IS 95)

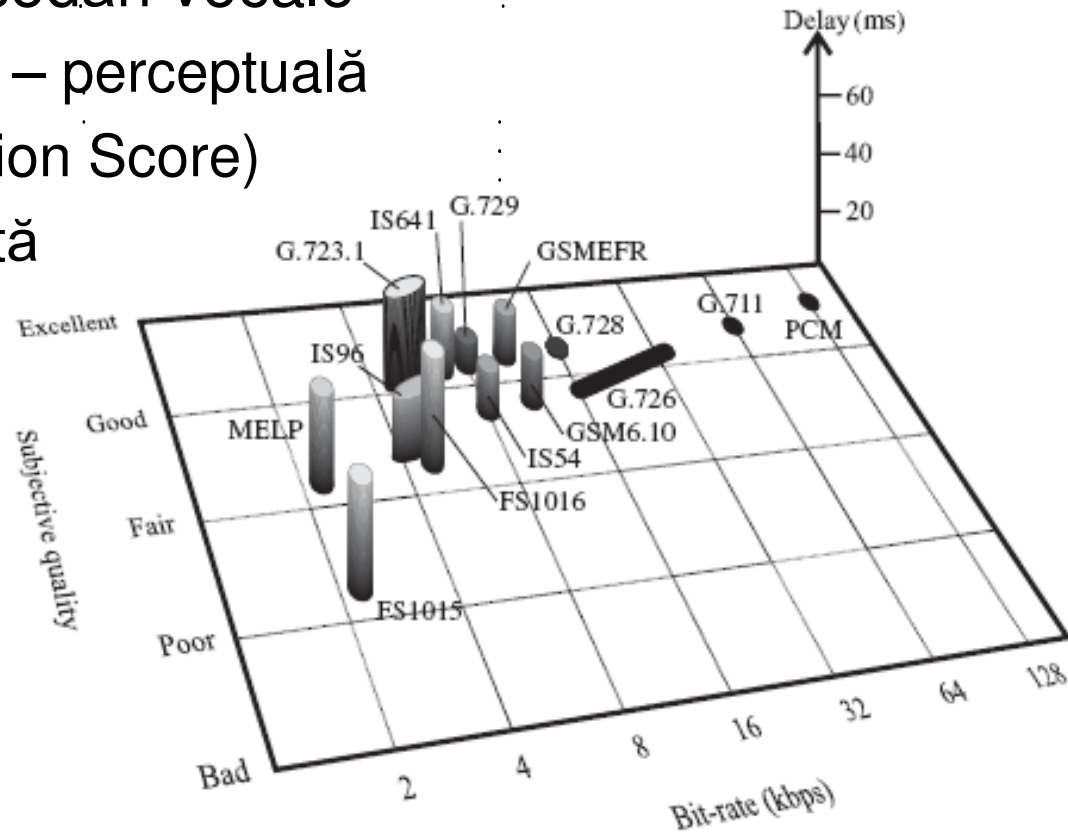
(code excited linear prediction)

- Un cadru – 20ms
- Se transmit: coeficienții filtrelor, Codul excitației, câștigul;



Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Standarde ale codării vocale
 - Calitatea subiectivă – perceptuală (MOS – Mean Opinion Score)
 - Rata binară generată
 - Complexitatea aritmetică (delay de prelucrare)



Tehnici de transmisiune digitală a informației

Sumar al Codecurilor Vocale și Audio

Codor vocal (codec).	Rată de intrare (kb/s)			Debit binar (kb/s)	Rata compresiei			Calitate (MOS)	Complex. relativa
Calitate telefonică	8 biți								
PCM 8 biți (G.711)	64			64	1 (ref)		4,3	1 (ref)	
PCM 7 biți				56	1,14		3,9	1	
PCM 6 biți				48	1,33		3,8	1	
PCM 5 biți				40	1,6		2,65	1	
PCM 4 biți				32	2		2,3	1	
ADPCM 5 biți (G.726)				40	1,6		4,3	200	
ADPCM 4 biți (G.721)				32	2		4,1	200	
ADPCM 3 biți (G.726)				24	2,67		3,4	200	
ADPCM 2 biți (G.726)				16	4		2,4	200	
LD-CELP (G.728)				16	4		4,0	1 900	
RPE-LTP (GSM)				13	4,92		3,5	600	
MPLP				9,6	6,67		3,4	1 100	
VSELP (IS-54)				8	8		3,45	1 350	
ACELP (G.729)				8	8		4,0	1 050	
MP-MLQ (G.723)				6,3	10,16		4,0	1 460	
ACELP (G.723)				5,3	12,08		3,5	1 600	
CELP (FS-1016)	4,8	13,33		3,2	1 600				
Calitate radio AM	8 biți	16 biți							
SB-ADPCM (G.722)	128	256	64	2	4	4,1	1000		
			56	2,9	4,58	4,0	1000		
			48	2,67	5,33	3,7	1000		
			32	4	8	4,1	10000		
LD-CELP			16	8	16	3,8	40000		
Calitate stereo HiFi	32 kHz	44,1 kHz	48 kHz		32 kHz	44,1 kHz	48 kHz		
MUSICAM-I	1024	1411	1536	384	2,67	3,67	4,0	4,2	<10000
MUSICAM-II				256	4,0	5,5	6,0	4,1	<10000
AC-2				256	4,0	5,5	6,0	4,1	<10000
4SB-ADPCM				256	4,0	5,5	6,0	4,0	2000
ASPEC				128	8,0	11,0	12,0	3,5	17500
PAC				128	8,0	11,0	12,0	4,5	25000

Tehnici de transmisiune digitală a informației

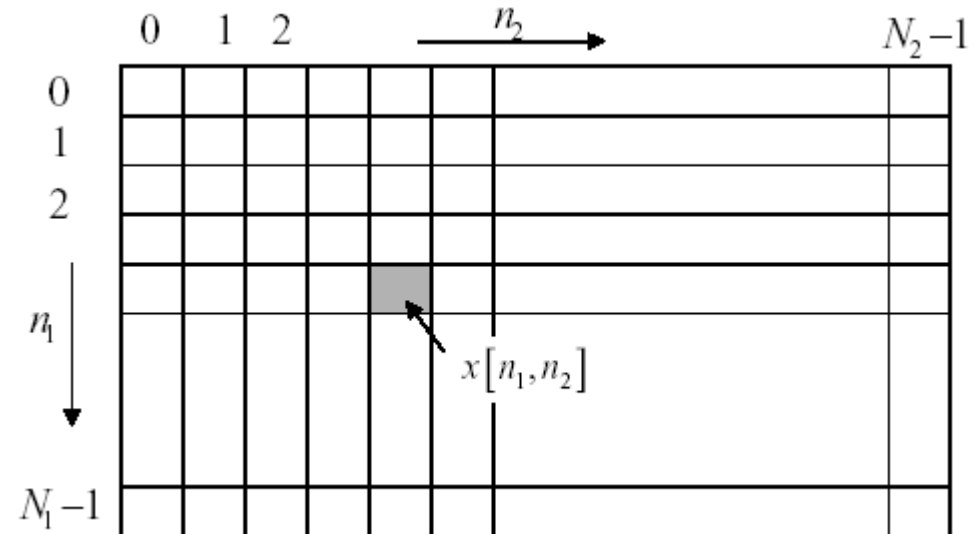
□ Codarea digitală a semnalelor imagine

- Imagini fixe ($N_1 \times N_2$ pixeli)

$$\mathbf{x} = \{x(n_1, n_2) \mid 0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, \quad 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1\}$$

$$x(i, j) \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$$

- n = numărul de biți pt un pixel
- $n=8$ imagini domeniul comercial
- $n=12$ imagini domeniul medical
- $n=16$ imagini domeniul militar



Exemplu:

Imagine gri calitate SVGA (un octet/pixel): $800 \times 600 \times 8 = 480 \text{ kB}$;

Imagine color SVGA : $800 \times 600 \times 8 \times 3 = 1,44 \text{ MB}$ (un octet per culoare R,G,B per pixel);

Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Cu transformata “cosinus discreta” DCT
 - După aplicarea DCT semnalului imagine (gri) se păstrează cei mai importanți coeficienți (mai mic decât numărul de pixeli ai imaginii), care se cuantizează pe 32 sau 16 biți.
 - Rata de compresie:

$$RC = \frac{n_c \cdot n_l \cdot n_{bit_per_pixel}}{n_{coef} \cdot n_{bit_per_coef}}$$

size = 65240 Bytes



3677 din 65536 coef.



101 din 65536 coef.



$$RC = \frac{256 \cdot 256 \cdot 8}{3677 \cdot 32} = 4.45$$

$$RC = \frac{256 \cdot 256 \cdot 8}{101 \cdot 32} = 162$$

DCT se utilizează în toate standardele de compresie a imaginilor: GIF, JPEG, dar și pentru compresie video: MPEG.

Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Compresie cu cuantizare vectorială
 - metoda de compresie cu pierdere de informației;
 - Se descompune imaginea numerică în blocuri dreptunghiulare/patratare de dimensiune fixată ;
 - un bloc este descris de un vector de dimensiune K (într-un spațiu dimens. K);
 - Spațiul complet (K -dimensional) este împărțit în regiuni disjuncte (regiuni *Voronoi*), fiecare regiune având un *vector de cod* reprezentativ, mulțimea cuvintelor de cod formând *dicționarul*;
 - Fiecărui vector (al unui bloc) i se asociază *cuvântul de cod* corespunzător regiunii Voronoi, al cărui index (din dicționar) se codează și se transmite;

Exemplu: imaginea “cameraman”, dimensiune $256 \times 256 \times 8$ biti și blocuri 4×4 ;

Imaginea initiala



11944 vectori



8200 vectori



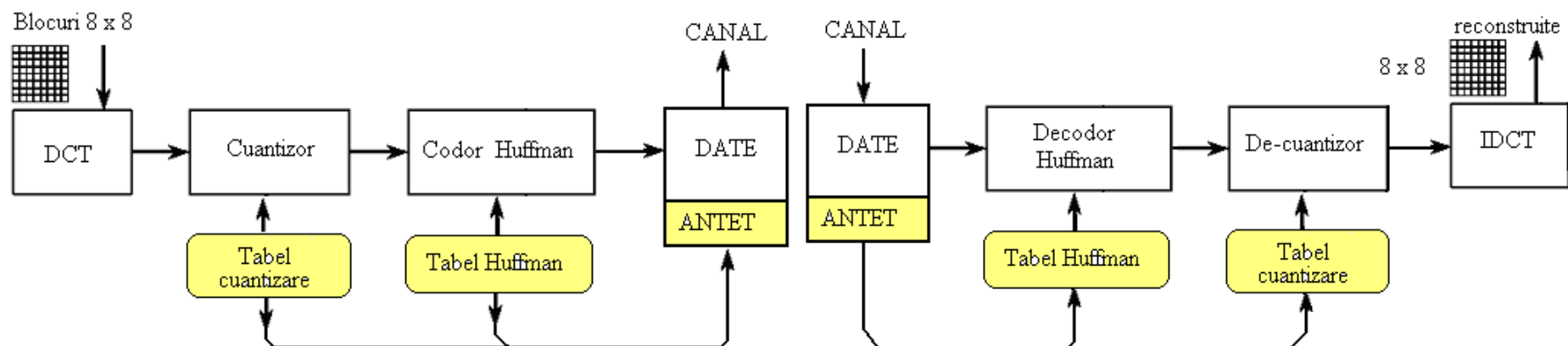
$$RC = \frac{256 \cdot 256 \cdot 8}{11944 \cdot [\log_2 11944]} = \frac{256 \cdot 256 \cdot 8}{11944 \cdot 14} = 3.65$$

$$RC = \frac{256 \cdot 256 \cdot 8}{8200 \cdot [\log_2 8200]} = \frac{256 \cdot 256 \cdot 8}{8200 \cdot 14} = 4.56$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Compresia JPEG

- Utilizează DCT pe blocuri de dimensiuni 8×8 ;
- După accentuare, coeficienții DCT (parcurgere în zig-zag) sunt cuantizați pe 8 biți și apoi codați Huffman, (operații în ordine inversă la recepție);



Exemplu compresie/calitate

64 coef, NMSE=0



RC = 16; 16 coef, NMSE=142



RC = 64; 4 coef, NMSE=377



Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Compresia (codarea) video

- Semnal video analogic - 5MHz, cuantizat 8biți/eșantion → 80Mbps;
- Semnal video digital ne-într., calitate SVGA : $800 \times 600 \times 8 \times 3 / 20\text{ms} = 576\text{Mbps}$;

Standardul pt compresie **Video MPEG** (*Moving Pictures Expert Group*):

- tehnici predictive de **estimare a mișcării** – *deplasarea relativă*, între cadre succesive de imagine → se transmite doar *Vectorul de deplasare*;
- Tehnici predictive de **Compensare a mișcării** (utilizând predicția mișcării în timp între cadre alăturate);
- Utilizează transformata DCT;

Aplicatiile de baza ale compresiei video

Aplicatia	Debit informatie	Standarde
Televiziune numerica	2 . . . 6 Mbps (10 . . . 20 Mbps for HD)	MPEG-2
Video DVD	6 . . . 8 Mbps	MPEG-2
Video internet	20 . . . 200 kbps	H.263, MPEG-4, H.26L/JVT
Video-conferinte, video-telefonie	20 . . . 320 kbps	H.261, H.263
Video sub 3G	20 . . . 100 kbps	H.263, MPEG-4

□ Compresia (codarea) video MPEG

▪ *tipuri de predicție:*

- predicție *înainte* (utilizează ca predicție vectorul mișcării față de cadrul de referință anterior);
- predicție *înapoi* (utilizează ca predicție vectorul mișcării față de cadrul de referință viitor);
- predicție *bidirecțională* (utilizează ca predicție media vectorilor mișcării din cadrele de referință anterior și respectiv viitor);

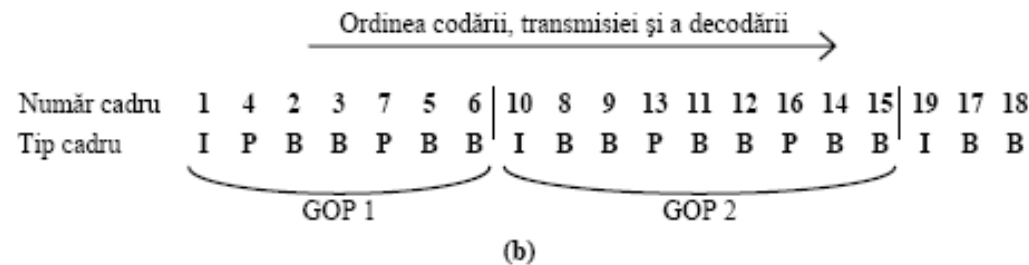
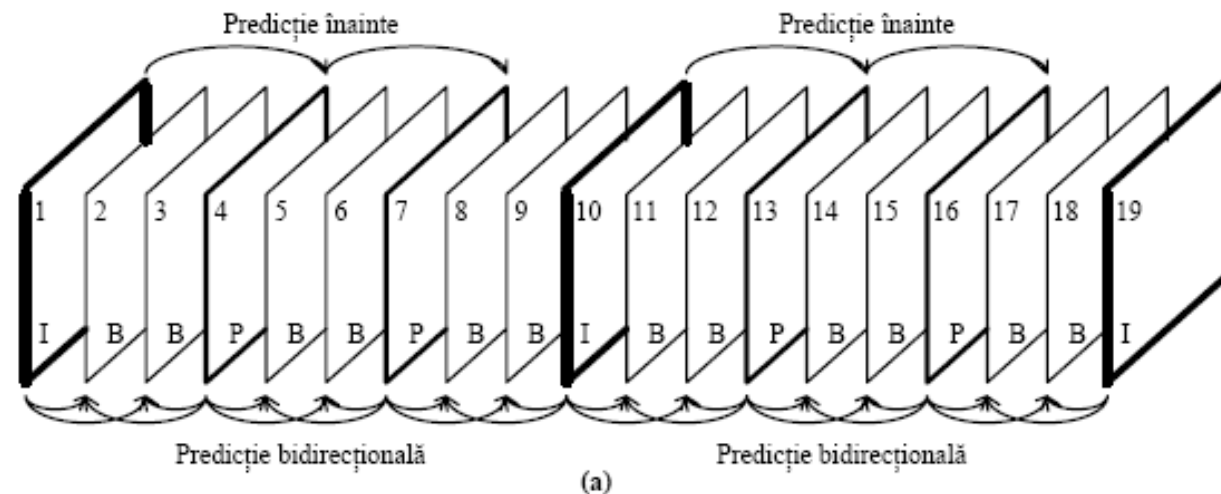
▪ Tipuri de cadre:

- Cadre I (intercadru) – referință pentru cadrele P și B; compresie minimă (20:1), ca la JPEG (MC-DCT);
- Cadre P (*predicție* directă)- referință pentru cadrele B; rată de compresie medie (80:1);
- Cadre B (*predicție bidirecțională*), rata de compresie maximă (320:1);

Tehnici de transmisiune digitală a informației

Compresia (codarea) video MPEG

- GOP: *pattern*-ul de repetare al întercadrelor; exemplu (IBBPBBPBB);
- Raportul între numărul cadrelor I, P și B determină rata compresiei și calitatea imaginilor reconstruite;



Tehnici de transmisiune digitală a informației

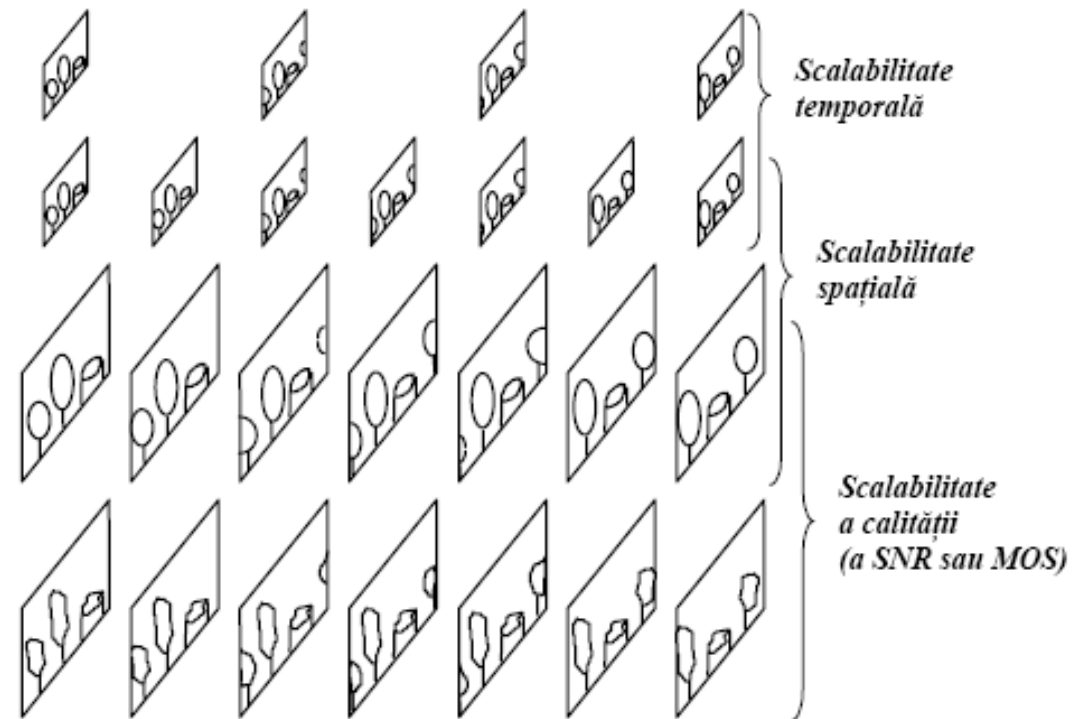
- Alte facilități ale standardelor MPEG-2,4

- Scalabilitate:

- *Spațială* - în aplicații de telecomunicații, interacțiuni între formate standarde video, acces la baze de date video, etc;

- *Temporală* – pt trecerea de la rezoluții temporale reduse la Rezoluții temporale mari;

- *calității* - pt aplicații implicând servicii cu *calități multiple, etc;*



Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Parametrii caracteristici ai semnalelor video digitale

ITU-T	Format (aproximativ) ISO TV		Rezoluție spațială (pixeli)		Rezol. culoare (b/pixel)	Volum cadru (Mb)	Rezol. temp. (cadre/s)	Rată de transfer (Mb/s)
	SubCIF		120 x	96	16	0,18	5	0,92
	QCIF		180 x	144	16	0,41	10	4,15
			180 x	144	16	0,41	15	6,22
CIF	MPEG low	VHS	360 x	288	24	2,45	30	74,65
4CIF	MPEG main	CCIR 601	720 x	576	24	9,95	30	298,60
16CIF	MPEG 1440high		1440 x 1152		24	39,81	60	2388,80
	MPEG high	HDTV	1920 x 1152		24	53,08	60	3185,05
		SHDTV	2048 x 2048		24	100,66	60	6039,80

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▪ Standardele de compresie MPEG:

- MPEG1: generează un debit de până la 1,5Mbps. Este standard de compresie pentru film (aplicații video CD-ROM, video înregistrat prin internet - .mpg și VideoCD) și audio (nivelul 3 al MPEG-1 →mp3);
- MPEG2: generează debite între 1,5-15Mbps. Este standard pentru televiziunea digitală, compresia DVD, și compresie pentru HDTV. Îmbunătățire față de MPEG-1 → comprimare eficientă a imaginilor în rețea;
- MPEG-4: standard de compresie orientată pe obiecte pentru multimedia și Web (similar cu limbajul de modelare a realității virtuale). Obiectele individuale dintr-o scenă (film, sunet, subtitrare, etc.) sunt urmărite separat, dar comprimate împreună într-un fișier MPEG4. Permite o compresie scalabilă, controlarea independentă a obiectelor în scenă și oferă suport pentru interactivitate;
- MPEG-7: (Interfață de descriere a conținutului multimedia) – oferă cadru pt manipularea, filtrarea și personalizarea conținutului multimedia: a integrității, a securității, etc.
- MPEG-21: - standard în elaborare care să descrie elementele necesare pt construirea unei infrastructuri pt furnizarea și consumul diversificat de conținut multimedia;

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Modulații digitale

Modulația informației digitale – asocierea unică între o secvență de informație de k biți, $k = \log_2 M$ unei forme de undă deterministă $\{s_m(t), m=1, \dots, M\}$ - simbol, de durată T (*perioadă de simbol*).

- *Viteza de semnalizare*
 - numărul de simboluri transmise per secundă;
 - egală numeric cu $1/T$;
 - se măsoară în *baud* (simboluri per secundă);
- *Debit binar (D_b)*
 - numărul de biți transmiși per secundă;
 - egal numeric cu $1/T_b$;
 - se măsoară în *bps* (biți per secundă);

În transmisiunile digitale interesează ce debit binar (rată binară R_b în biți per secundă) se poate transmite printr-un canal. Factorii care determină D_b sunt: banda disponibilă – W (Hz), numărul de nivele ale semnalului și calitatea canalului (nivelul de zgomot).

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▣ Modulații digitale

▪ Canal de bandă limitată (W Hz):

- Fără zgomot: - debitul maxim de informație care se poate transmite fără eroare (*capacitatea canalului*) Nyquist:

$$C = D_{b \max} = 2 \cdot W \cdot \log_2 M = 2 \cdot k \cdot W \quad \text{cu } k \text{ biti mapati per simbol}$$

- Cu zgomot: - *capacitatea canalului* (C. Shannon):

- N_0 – densitatea spectrală de putere a zgomotului (alb și aditiv) $\rightarrow P_N = N_0 \cdot W$
- E_b - energia per bit de informație

$$C = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right) \quad \stackrel{D_{b \max}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{C}{W} = \log_2 \left(1 + \frac{C}{W} \cdot \frac{E_b}{N_0} \right)$$

- Pentru debit maxim: $P_S = E_s / T = E_b \cdot k / T = C \cdot E_b$;

- La limită, $W \rightarrow \infty$ ($C/W \rightarrow 0$),

- Pragul teoretic de zgomot de la care se poate realiza o comunicație digitală. $\frac{E_b}{N_0} \geq \frac{1}{\log_2 e} \cong 0,693 \rightarrow -1.6\text{dB}$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▣ Modulații digitale

- Cu *purtătoare* impulsuri (Modulații în banda de bază);
- Cu purtătoare sinusoidală (*trece bandă*)

▣ Modulația în banda de bază - coduri de linie

- **Banda de bază** - domeniul de frecvențe ocupat de semnalul digital, purtător de informație, care nu a suferit o translație de frecvență (modulație cu purtătoare sinusoidală);

- utilizată pentru a transmite datele la distanțe de câteva sute, mii de metri pe cabluri electrice sau fibră optică;

Expresia generală:

$$s(t) = \sum_n g_T(t - nT; a_{m,n}; \sigma_n)$$

- T – durata (perioada) de simbol

- $a_{m,n}$ - simbolurile emise de sursă $a_m \in \mathcal{A}$ la momentul de timp n ; \mathcal{A} - alfabetul sursei; (a_n este o variabilă aleatoare discretă)

- σ_n - starea modulatorului;

- n - o precizare temporală (un moment de eșantionare);

Tehnici de transmisiune digitală a informației

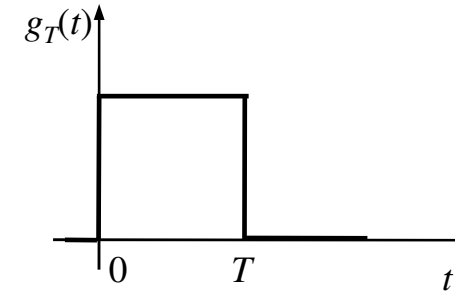
□ Modulația în banda de bază - coduri de linie

- Pentru modulația fără memorie:

$$s(t) = \sum_n a_n \cdot g_T(t - nT)$$

- **Exemplu:** MIA pe M niveluri

$$a_n \in \{(2m-1-M) \cdot d\} \quad , \quad m = \overline{1 \dots M} \quad , \quad M = 2^k$$

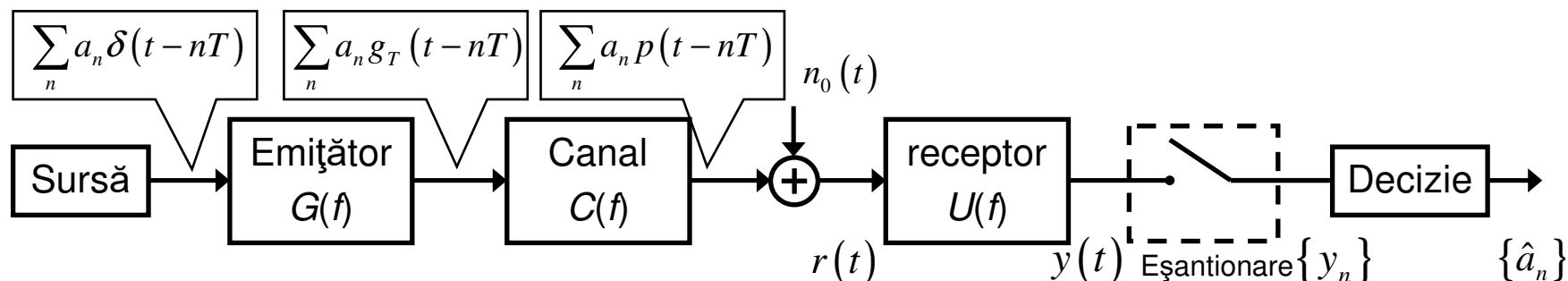


▪ Criterii de performanță:

- Maximizarea ratei binare de transmisie;
- Minimizarea probabilității de eroare binară;
- Minimizarea puterii de emisie;
- Minimizarea benzii ocupate (pt același debit binar);
- Ușurința de realizarea a sincronizării de simbol (bit);
- Minimizarea complexității sistemului;

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▣ Modelul modulației în banda de bază (BB)



- *Sursa* - generează o secvență staționară v.a. i.i.d, $\{a_n\}$ cu $E\{a_n\} = 0$ și $E\{a_n^2\} = \sigma_a^2$; semnalul emis de sursă: $\sum_n a_n \delta(t - nT)$

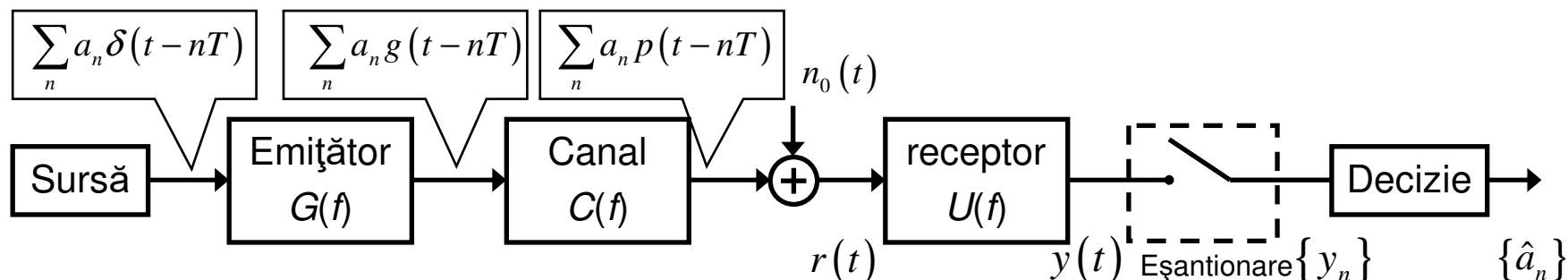
- *Emitătorul* - $g_T(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)$; semnalul transmis pe canal: $\sum_n a_n g_T(t - nT)$

- *Canalul* - $c(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} C(f)$ (se comportă ca un filtru FTJ) ;
semnalul recepționat, cu zgomot AWGN:

$$r(t) = \sum_n a_n p(t - nT) + n_0(t) ; \text{ cu } p(t) = g_T(t) * c(t) \Leftrightarrow P(f) = G(f) \cdot C(f)$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▣ Modelul modulației în banda de bază



- *Receptorul* - $u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} U(f)$ semnalul recepționat după *filtrarea* de la recepție (necesară pentru limitarea puterii zgomotului) :

$$y(t) = \sum_n a_n q(t - nT) + n(t); \text{ cu } q(t) = g(t) * c(t) * u(t) \Rightarrow Q(f) = G(f) \cdot C(f) \cdot U(f)$$

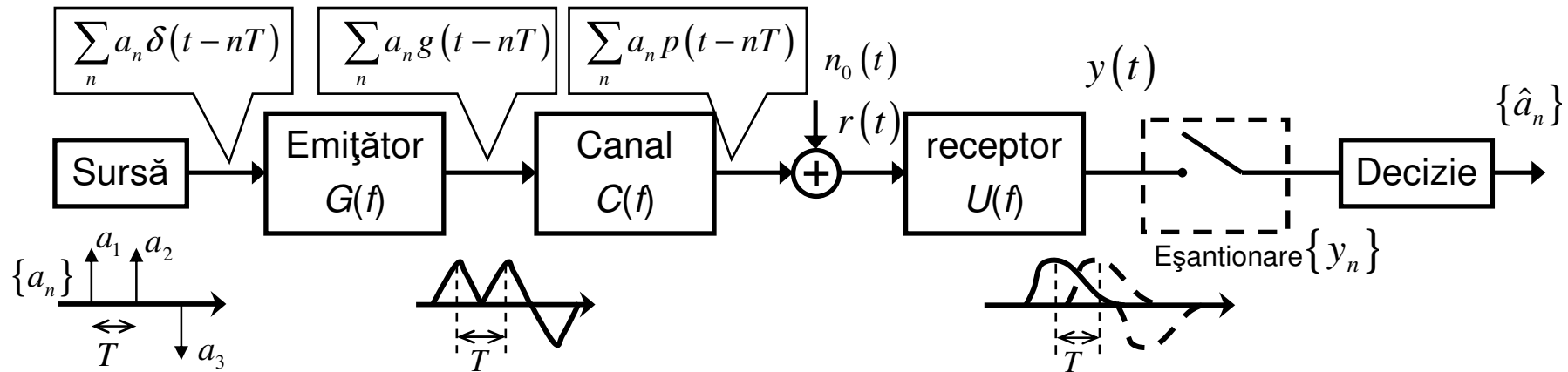
$$\text{si } n(t) = n_0(t) * u(t) \Rightarrow \bar{S}_n(f) = |U(f)|^2 \bar{S}_{n_0}(f)$$

- *Circuitul de eșantionare* – (momentul de sondare pt performanțe optime)

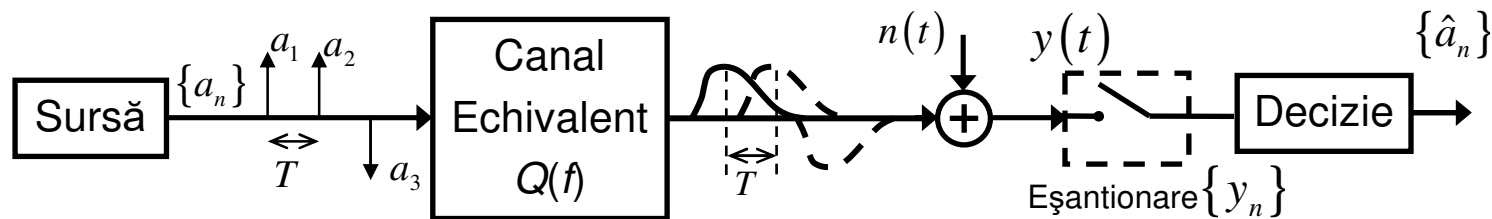
$$y_k = y(t_0 + kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n q_{k-n} + n_k = \underbrace{a_k q_0}_{\text{simbolul curent}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n q_{k-n}}_{\text{ISI - interferența intersimbol}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q_{k-n} + \underbrace{n_k}_{\text{zgomotul filtrat}}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

Modelul modulației în banda de bază



Modelul canalului echivalent (BB)



$$\begin{cases} q(t) = g(t) * c(t) * u(t) \\ n(t) = n_0(t) * u(t) \end{cases}; \begin{cases} Q(f) = G(f) \cdot C(f) \cdot U(f) \\ \bar{S}_n(f) = |U(f)|^2 \bar{S}_{n_0}(f) \end{cases} \quad y(t) = \sum_n a_n q(t - nT) + n(t);$$

$$y_k = \underbrace{a_k q_0}_{\text{simbol curent}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n q_{k-n}}_{\text{ISI - interferența intersimbol}} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q_{k-n} + \underbrace{n_k}_{\text{zg. filtrat}}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Modelul modulației în banda de bază

MIA digital $a_m = (2m+1-M)d$, $m=0,1,\dots,M-1$

- decizii eronate dacă:

$$|ISI+n_k| > d \quad \text{pentru} \quad m=0,\dots,M-1; \quad a_m = (-M+1)d \dots (M-1)d$$

Obs: și în absența zgomotului pot apare decizii eronate din cauza $ISI \neq 0$.

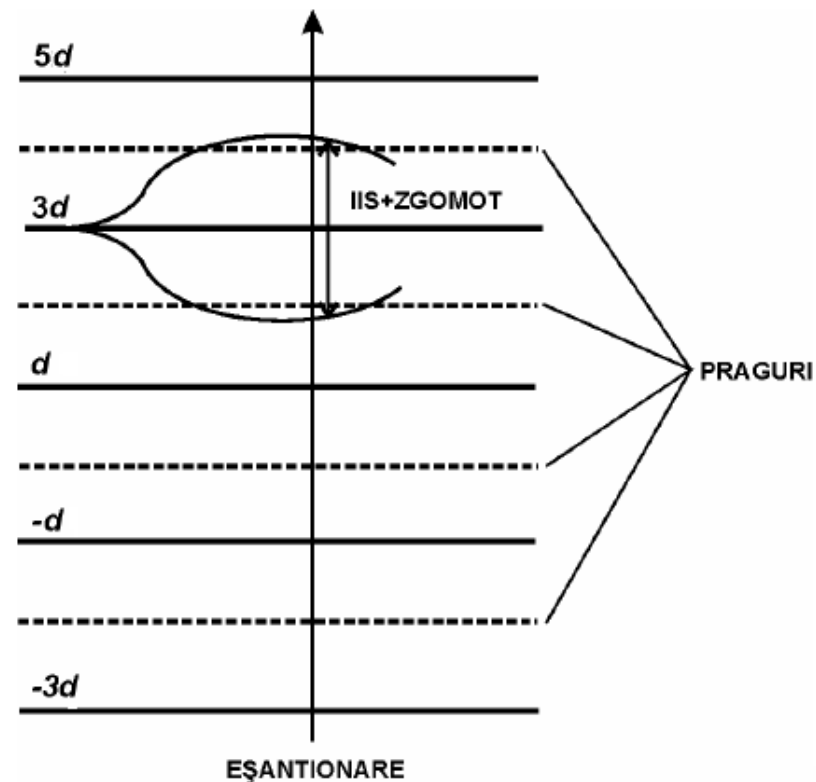
- Criterii pentru eliminare ISI:

Criteriul I al lui Nyquist.

(forma pt funcția pondere globală

$$g(t) * u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} G(f) \cdot U(f)$$

pentru $ISI=0$)



Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Criteriul I al lui Nyquist (pt ISI=0)

- condițiile ce trebuie îndeplinite de factorul de transfer global $Q(f)$ pentru anularea interferenței intersimbol (ISI) *la momentul de eșantionare* :

$$q_n = q[n] = q(t_0 + nT) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pt } n=0 \\ 0 & \text{in rest} \end{cases}$$

Pt MIA digital cu impuls purtător $\delta_T(t) = \sum_n \delta(t - nT)$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} q_\delta(t) = \sum_n q(nT) \delta(t - nT) &\xrightarrow{\mathcal{F}} Q_\theta(f) = \frac{1}{T} \sum_n Q\left(f - \frac{n}{T}\right) \\ \text{impunind } q_\delta(t) = \delta(t) & \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q_\theta(f) = 1 = \frac{1}{T} \sum_n Q\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

- se definește *factorul de transfer echivalent în tensiune, restrâns la o perioadă*:

$$Q_{eq}(f) = T \cdot Q_\delta(f) \cdot P_{\frac{1}{2T}}(f) ; \text{ cu } P_{\frac{1}{2T}}(f) = \sigma\left(f + \frac{1}{2T}\right) - \sigma\left(f - \frac{1}{2T}\right) ; f_N = \frac{1}{2T} \text{ frecvența Nyquist}$$

$$\Rightarrow q_{eq}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Q_\delta(f)\} = q_\delta(t) * \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \sum_n q(nT) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi(t - nT)}{T}\right)$$

- Funcțiile $q(t)$ și $q_{eq}(t)$ au aceleași valori ale eșantioanelor la momentele nT .

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Soluția de bandă minimă (pt ISI=0)

$$Q_{eq}(f) = T \cdot p_{\frac{1}{2T}}(f) \Rightarrow q_{eq}(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \text{sinc}(\omega_N t) = \text{sinc}(2\pi f_N t)$$

Concluzie: dacă un sistem în BB are caracteristica de transfer globală $Q_{eq}(f)$ care asigură ISI=0 (la momentele de eșantionare), fără zgomot poate transmite fără eroare un simbol de durată T ocupând o bandă de frecvență $f_N = 1/2T$.

Exemplul 1. dacă numărul biților mapați per un simbol este $\log_2 M = 1$, rezultă un debit binar maxim:

$$R = D_b = 1/T = 2 \cdot f_N \text{ bit/s și}$$

o eficiență spectrală maximă: $\eta = D_b/W = 2 \cdot f_N / f_N = 2 \text{ bit/s/Hz.}$

Exemplul 2. pt o modulație multinivel $\log_2 M > 1$, rezultă un

debit binar maxim: $R = D_b = \log_2 M \cdot 1/T = \log_2 M \cdot 2 \cdot f_N \text{ bit/s și}$

eficiența spectrală maximă: $\eta = D_b/W = \log_2 M \cdot 2 \cdot f_N / f_N = \log_2 M \cdot 2 \text{ bit/s/Hz.}$

Exemplul 3. dacă se consideră în plus și zgomot aditiv, Gaussian, alb (AWGN) se poate stabili E_b / N_0 minimă pentru eficiența spectrală η (limita Shannon):

$$D_b < D_{b_max} = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_s}{P_N} \right) \Rightarrow \eta < \log_2 \left(1 + \eta \cdot \frac{E_b}{N_0} \right) \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} \geq \frac{2^\eta - 1}{\eta}$$

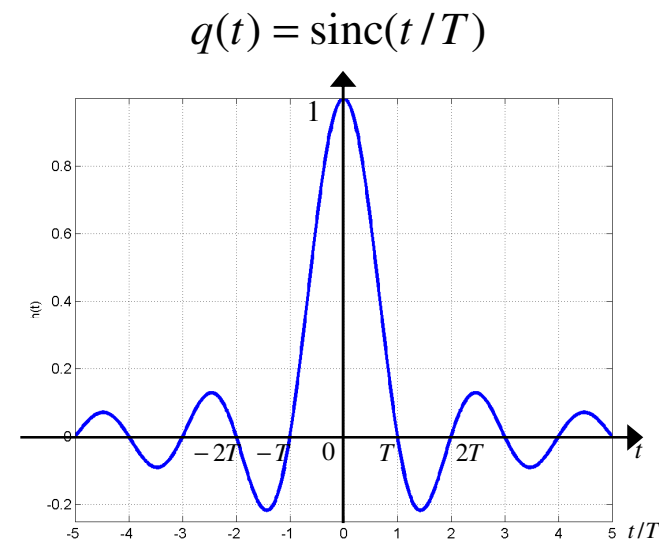
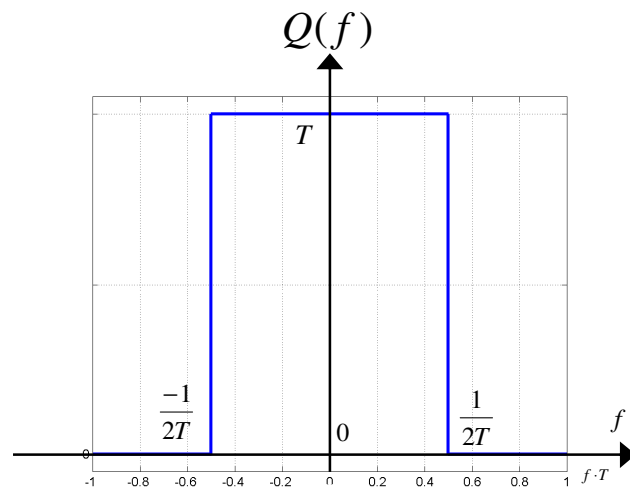
Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Soluția de bandă minimă (pt ISI=0)

Neajunsuri: - funcția pondere nu este cauzală - se poate realiza fizic dacă se acceptă o întârziere:

$$q_{eq}(t) = \text{sinc}[\omega_N(t-t_0)]; \quad q_{eq}(t)|_{t < 0} = 0 \Rightarrow Q_{eq}(f) = T \cdot p_{\frac{1}{2T}}(f) \cdot e^{-j\omega_N t_0}$$

- este foarte sensibilă la eroarea momentului de eșantionare optim;



Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Soluția de bandă ne-minimă (pt ISI=0)

- Se acceptă o bandă mai mare decât $f_N=1/2T$, cu un procent – *factor de depășire* (roll-off) – β , dar cu păstrarea ISI=0 și aceeași rată de simbol $1/T \rightarrow$ banda: $W=(1+\beta) \cdot f_N$, cu $0 < \beta < 1$. (*Există multe soluții posibile*);

▪ Criterii pentru forma pulsului

- Să reducă ISI la recepție;
- Să ocupe banda de frecvență eficient (bandă mică);
- Să asigure robustețe la eroarea de sincronizare (*jiter*) – lobi laterali mici ai formei în timp;

▪ Pulsuri (filtre) de tip Nyquist

- ISI = 0 la momentele de eșantionare (în timp);
- Funcția de transfer (în frecvență) – convoluția dintre o funcție rectangulară și o funcție reală pară;
- Forma pulsului (în timp) – reprezentată ca produsul dintre $\text{sinc}(t/T)$ și o funcție de timp;

Exemplu: caracteristica *cosinus ridicat* ;

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Familia de caracteristici de tip *cosinus ridicat*

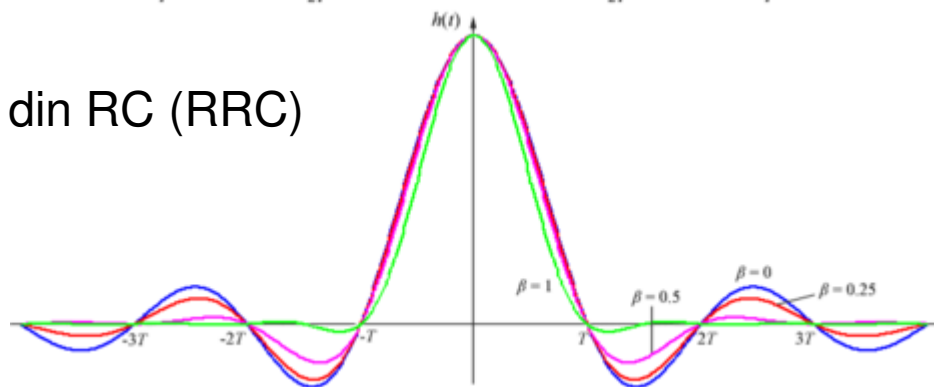
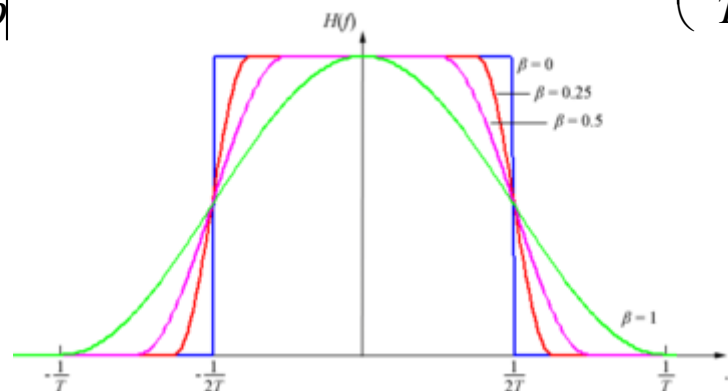
$$Q_{RC}(\omega) = \begin{cases} T & ; |\omega| \leq \omega_N(1-\beta) \\ \frac{T}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{T}{2\beta} (|\omega| - \omega_N(1-\beta)) \right] \right\} & ; \omega_N(1-\beta) < |\omega| \leq \omega_N(1+\beta) \\ 0 & ; \omega_N(1+\beta) < |\omega| \end{cases} \quad \omega_N = 2\pi f_N = \frac{\pi}{T} \Rightarrow q_{RC}(t) = \text{sinc}(\omega_N t) \frac{\cos(\omega_N t)}{1 - \left(\frac{2\beta t}{T}\right)^2}$$

$$W - f_N : \text{exces de banda} \rightarrow \beta = \frac{W - f_N}{f_N}$$

- Lățimea de bandă necesară:
- pt BB: $W = (1+\beta) \cdot f_N / 2$
- pt trece bandă: $W = (1+\beta) \cdot f_N$
- Obs
- În practică se utilizează caract. *radical* din RC (RRC)

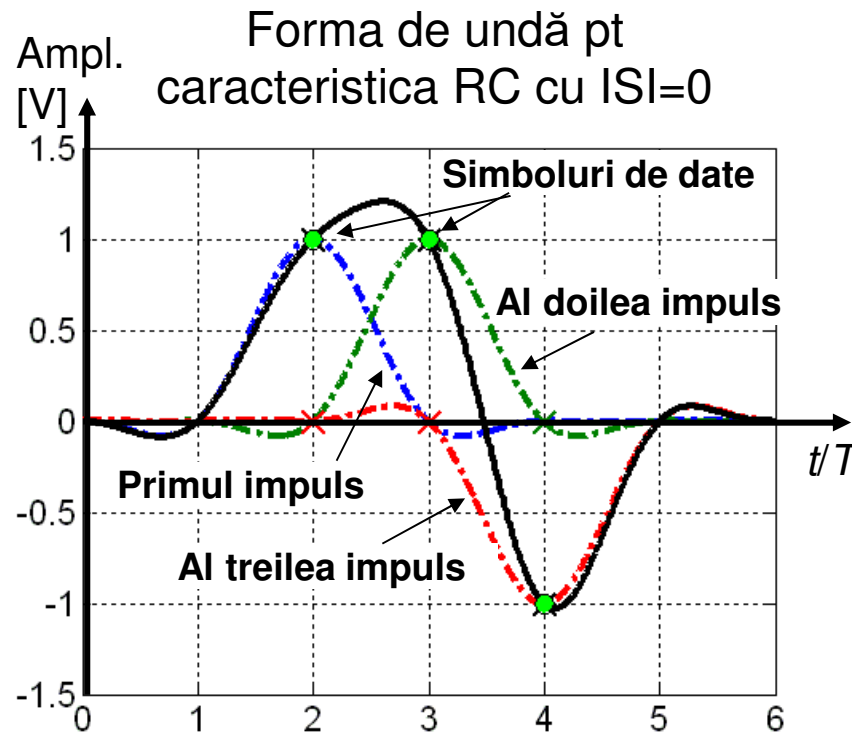
$$G(f) = U(f) = H_{RRC}(f) = \sqrt{Q_{RC}(f)}$$

$$g(t) = u(t) = h_{RRC}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{RRC}(f)\}$$

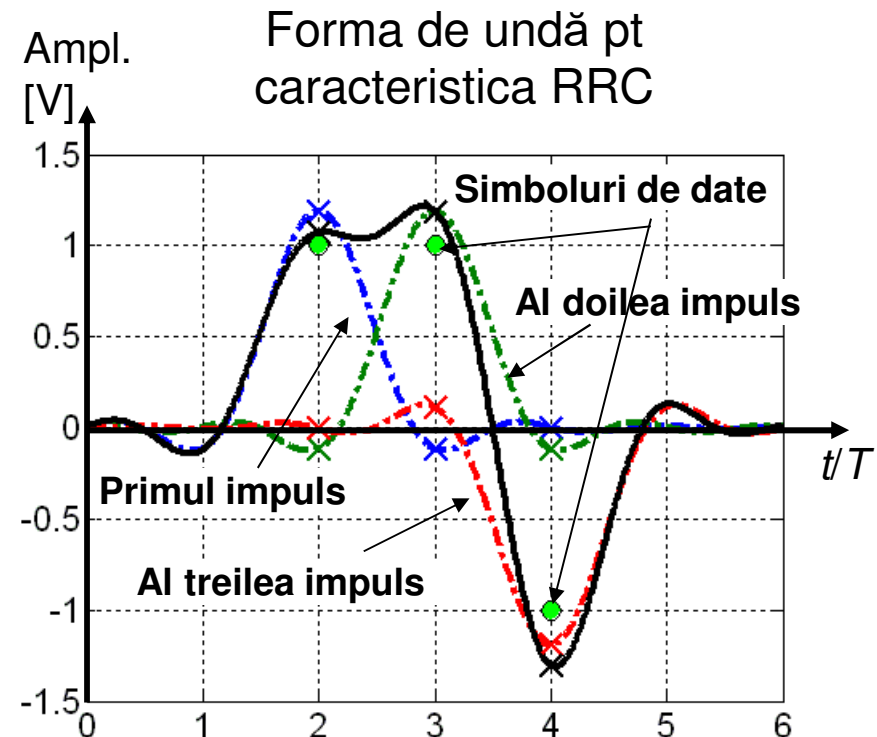


Tehnici de transmisiune digitală a informației

Exemple impulsuri



La $t=nT$, forma de undă are valorile simbolurilor transmise (ISI=0)



La $t=nT$, forma de undă are valori diferite de simbolurilor transmise

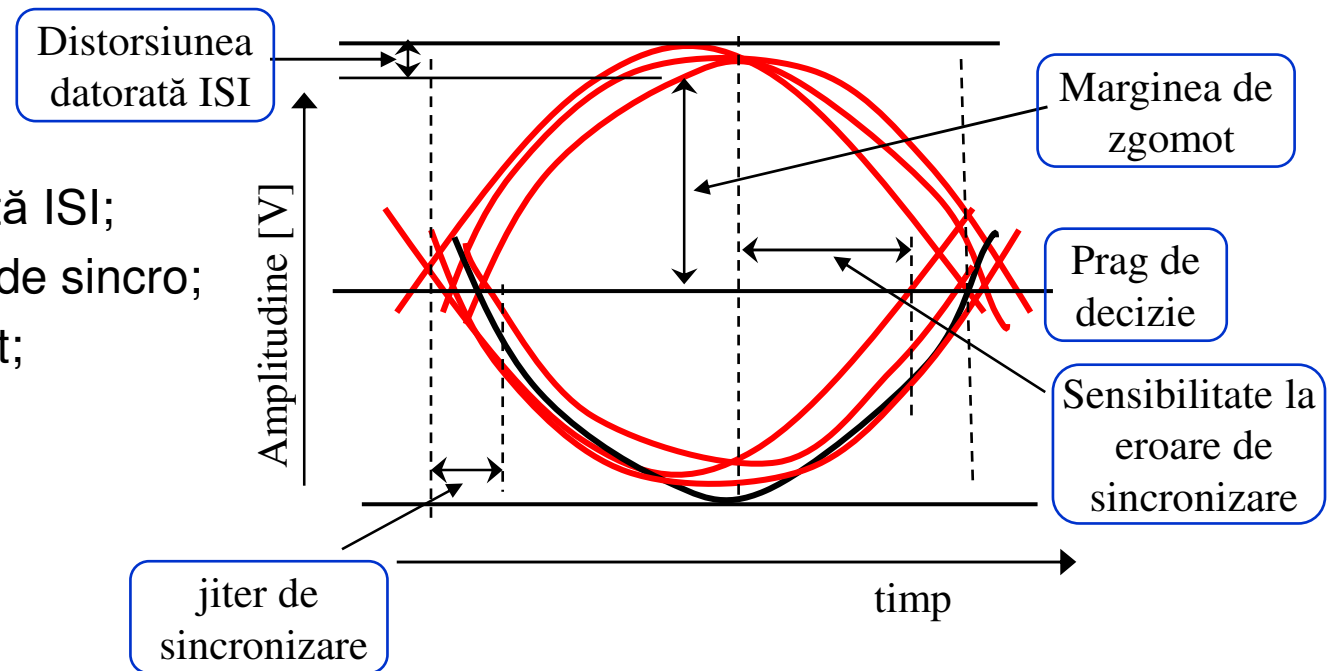
Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Diagrama ochiului

- Afișarea semnalului BB în domeniul timp (osciloscop) pe durata T , *centrat* pe momentul optim de eșantionare ($T_n - T/2$, $T_n + T/2$);

Se evaluează:

- Distorsiunea datorată ISI;
- Sensibilitatea la err de sincro;
- Marginea de zgomot;



Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Exemple diagrame ale ochiului

Diagrama ochiului: ISI=0, $z_g=0$

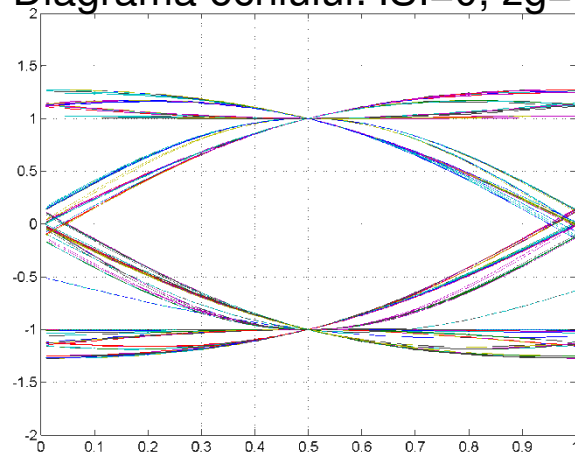


Diagrama ochiului: ISI \neq 0, $z_g=0$

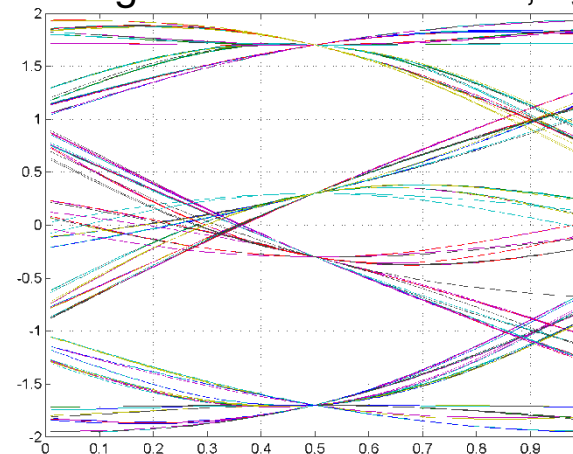


Diagrama ochiului: ISI=0, $E_b/N_0=20$ dB

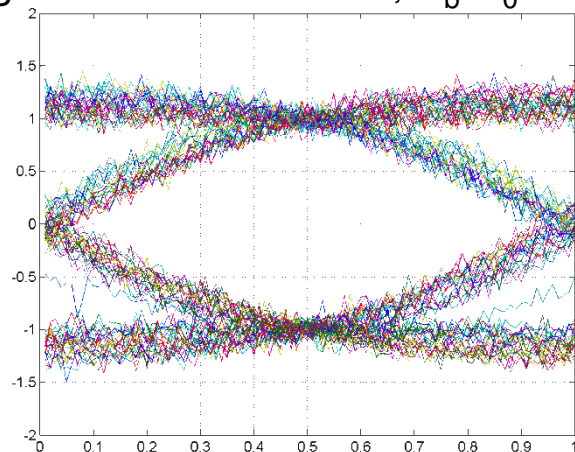
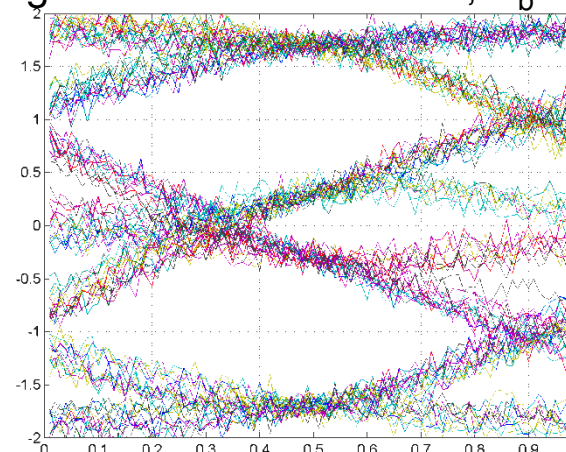


Diagrama ochiului: ISI \neq 0, $E_b/N_0=20$ dB



Tehnici de transmisiune digitală a informației

▪ Observație – capacitatea canalului AWGN

Pentru evaluarea posibilităților de îmbunătățire ale unei transmisiuni pentru canale AWGN (distanța până la limita Shannon) - *capacitatea canalului per dimensiune* “reală”, C_d și *eficiența per dimensiune* “reală”, η_d .

Cu un semnal real de bandă $W=f_N$ se pot transmite (cu ISI=0) $2 \cdot f_N$ eșantioane independente per sec $\rightarrow 2 \cdot f_N$ dimensiuni (dim) per sec.

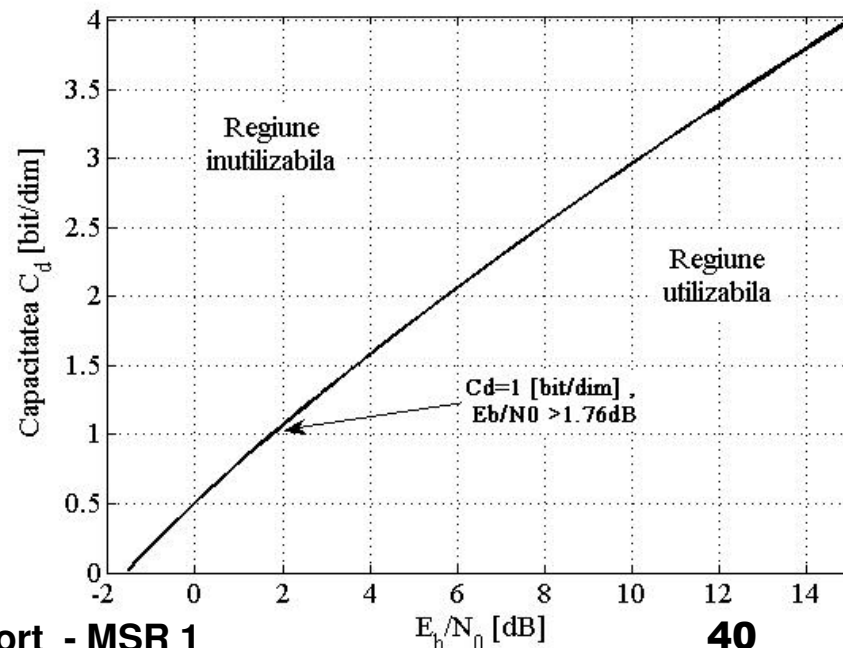
- *Capacitatea normalată a canalului* (per dimensiune: $C_d = C / 2 \cdot f_N$);
- *rata binară normalată* (per dimensiune a semnalului : $D_{b_d} = D_b / 2 \cdot f_N$);

Astfel:

$$C_d = \frac{C}{2f_N} = \frac{W}{2f_N} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_S}{P_N} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + \frac{D_b E_b}{W \cdot N_0} \right) = \frac{1}{2} \cdot \log_2 \left(1 + 2 \cdot D_{b_d} \cdot \frac{E_b}{N_0} \right)$$

$$D_{b_d} = C_d \quad \Rightarrow \quad \frac{E_b}{N_0} \geq \frac{2^{2C_d} - 1}{2C_d}$$



Tehnici de transmisiune digitală a informației

▣ Modulația în banda de bază - coduri de linie

Exemple:

- NRZ-L (Non-return-to-zero)
 - Simplu curent: $\{0, +A\}$ (au comp. DC), aplicații: FO;
 - Dublu curent: $\{-A / +A \leftrightarrow 1 / 0\}$ (comp. DC redusă), aplicații: TP, cablu coaxial; (exp: RS232);
 - Probleme cu sincronizarea;
- NRZI (Non-Return-to-Zero Inverted): $1 \rightarrow$ tranziție, $0 \rightarrow$ lipsă tranziție la începutul intervalului; (simplu curent sau dublu curent);
 - mai robuste la zgomot decât NRZ;
 - probleme de sincronizare;
- RZ (Return-to-zero)- trei nivele de tensiune: $1 \rightarrow \{+A\}$ pt $T/2$ și $\{0V\}$ pt $T/2$; $0 \rightarrow \{-A\}$ pt $T/2$ și $\{0V\}$ pt $T/2$:
 - Comp DC redusă;
 - Fără probleme de sincronizare;
 - Bandă necesară mai mare (dublarea numărului tranzițiilor);

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Modulația în banda de bază - coduri de linie

Exemple:

- Manchester (bifazic): 1 → front “+” al semnalului ckl, 0 → front “-” al semnalului ckl; aplicație: IEEE802.3 (Ethernet)
 - Tranziții la mijlocul fiecărui interval;
 - fără probleme de sincronizare;
 - Bandă mai mare ca NRZ (dublarea numărului tranzițiilor);
 - Utilizare ca semnal dublu curent;
 - Capacitate de detecție a erorilor;
- Manchester diferențial (bifazic diferențial): 1 → modificarea fazei semnalului ckl cu 180° , 0 → fază nemodificată; aplicație IEEE802.5 (token ring):
 - Similar cu Manchester dar mai robust la zgomot;
- Miller - divizare numerică cu 2 a codului bifazic diferențial:
 - Bandă necesară mai mică (reducere la $\frac{1}{2}$ a frecvenței tranzițiilor față de Manchester diferențial);

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Modulația în banda de bază - coduri de linie

- AMI (Alternate Mark Inversion): $0 \rightarrow 0V$, $1 \rightarrow$ valoare alternativă $\{+A$ sau $-A\}$; aplicație: prima generație PCM;
 - Probleme de sincronizare pt secvență lungă de **0**, soluție utilizează un scrambler; (Scamblare = egalizare probabilități pt **1** și **0** păstrând lungimea secvenței; descramblare la recepție);
 - Capabilitatea de detecție a erorilor;
 - Pseudoternary – codificare inversă a lui **0** și **1** ;
 - Comp. continuă nulă;
 - Mai sensibil la erori, necesită o putere dublă pt același BER față de NRZ;
- B3ZS (cod bipolar cu înlocuirea a trei 0 consecutivi) : $0 \rightarrow 0V$, $1 \rightarrow$ valoare alternată $\{+A$ sau $-A\}$;
 - un grup de 3 zerouri (000) se transmite 00Vi;
 - Pt o succesiune mai lungă de 3 zerouri, fiecare grup de 3 zerouri, după prima violare, se modulează B0Vi;

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Modulația în banda de bază - coduri de linie

- B8ZS (Bipolar with 8 Zeros Substitution): un bloc de 8 zerouri consecutive este înlocuit cu pulsuri care violează alternanța:
 - Ultimul impuls pozitiv → $0,0,0,+A,-A,0,-A,+A$;
 - Ultimul impuls negativ → $0,0,0,-A,+A,0,+A,-A$;
- CMI (Coded Mark Inversion): 0 → tranziție pozitivă, la mijlocul intervalului; 1 → valoare alternată $\{+A \text{ sau } -A\}$; aplicație: ierarhia digitală PDH fluxul E4;
- 2B1Q - caz particular de modulația multinivel: unui grup de doi biți îi corespunde un *simbol* cuaternar din valorile posibile $\{-450\text{mV}, -150 \text{ mV}, 150 \text{ mV}$ si $450 \text{ mV}\}$. Aplicație: in rețelele ISDN în interfața cu rata de bază (BRI - *Basic Rate Interface*).

Tehnici de transmisiune digitală a informației

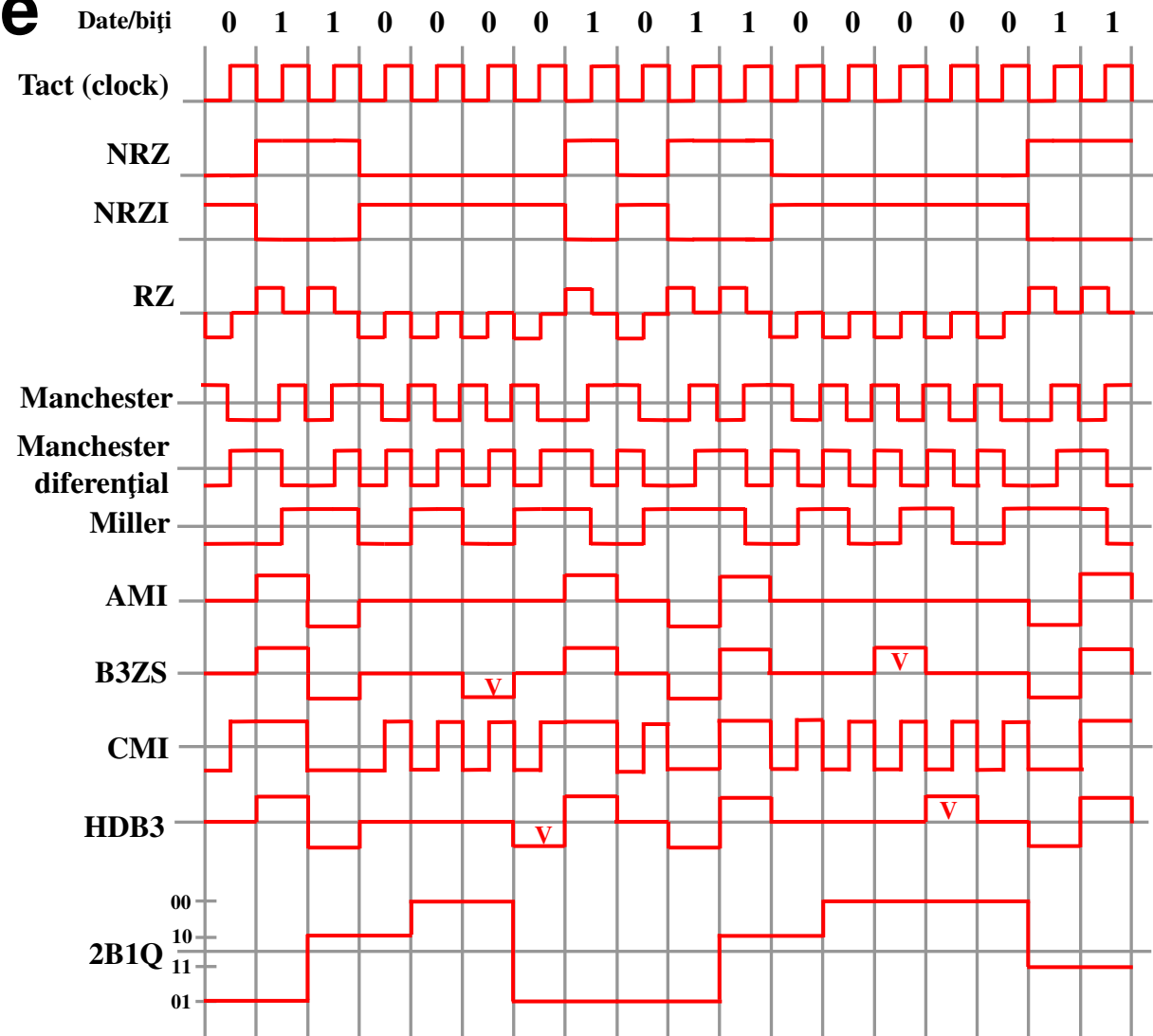
□ Modulația în banda de bază - coduri de linie

- HDB3 (High Density Bipolar of order 3 code): 0 → 0V, 1 → valoare alternativă {+A sau -A}; un grup de 4 zerouri (0000) se transmite 000Vi;
- dacă între două grupe de 4 zerouri avem un număr impar de 1 atunci 000Vi;
- dacă avem un număr par de 1 atunci B00Vi;
- $mBnB$ - pentru un grup de m biți (cuvânt de date) se transmit n biți (cuvânt de cod); reprezentare de tip NRZ (dublu curent pt comunicații pe fire metalice și simplu curent pentru comunicații pe FO);
 - 4B5B , aplicații: LAN 100BASE-TX , AES10-2003 MADI (interfața audio digitală a PC-ului), aplicații pe FO;
 - 6B/8B , aplicație pe FO;
 - 8B/10B aplicații: interfața PCI Express, IEEE 1394b (firewire), Serial ATA, SAS , Fibre Channel, SSA, Gigabit Ethernet, XAUI, DVI, DVB Interfața Serială Asincronă (ASI)
 - 64B/66B - eficiența maximă, propus în 2002
 - EFM (8B/14B) aplicații: CD și DVD;

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Coduri de linie

Asigură frecvența
tranzițiilor semnalului
pt sincronizarea de
simbol sau bit;





Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Proprietățile semnalelor de linie
 - să ocupe o bandă de frecvențe cât mai mică;
 - să nu aibă componente la frecvențe joase;
 - să permită refacerea semnalului de tact;
 - să fie cât mai robuste la zgomot;
- Exemple:
 - Semnalul codat Miller are bandă îngustă de frecvență, componenta pe frecvența de tact mică;
 - Semnalul bifazic nu are componente la frecvențele joase, are componentă importantă pe frecvența de tact, dar ocupă o bandă mare de frecvențe;
 - Semnalul simplu curent are spectrul mai îngust decât semnalul bifazic, componente importante la frecvențe joase și nu are componentă pe frecvența de tact;

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Densitatea spectrală de putere

Remember:

- $x(t)$ proces aleatoriu, real cu densitatea de probabilitate de ordin 1: $p_1(x) = p(x_1, t_1)$

- Momentul de ordin n :
$$E\{x^n(t_1)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x_1, t_1) dx$$

- Media statistică:
$$m_x = E\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, t) dx = ct \quad \text{pentru procese SSL;}$$

- Variația
$$\sigma_x^2 = E\{x^2(t_1)\} - (E\{x(t_1)\})^2$$

- Deviația standard (dispersie):
$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

- Funcția de intercorelație:
$$r_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 p(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2$$

- Funcția de autocorelație statistică
$$r_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

$$r_{xx}(\tau) = E\{x(t_1)x(t_1 + \tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_1 + \tau) dx_1 dx_2 \quad \text{pentru SSL}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Densitatea spectrală de putere

Remember (cont):

- $z(t) = x(t) + jy(t)$ proces aleator complex
- Funcția de autocorelație statistică

$$r_{zz}(t_1, t_2) = E\{z(t_1)z^*(t_2)\} = [r_{xx}(t_1, t_2) + r_{yy}(t_1, t_2)] + j[r_{yx}(t_1, t_2) - r_{xy}(t_1, t_2)]$$

- Funcția de intercorelație:

$$r_{zw}(t_1, t_2) = E\{z(t_1)w^*(t_2)\} = [r_{xu}(t_1, t_2) + r_{yv}(t_1, t_2)] + j[r_{yu}(t_1, t_2) - r_{xv}(t_1, t_2)]$$

- Pentru procese SSL:
$$\begin{cases} m_z = m_z(t_1) = \text{const.} \\ r_{zz}(t_1, t_2) = r(\tau), \tau = t_1 - t_2 \\ r_{zz^*}(t + \tau, t) = r_{zz^*}(\tau) = r_{z^*z}(-\tau) \end{cases}$$

- Procese ciclostacionare:

$$\begin{cases} m_z(t) = m_z(t + kT) \text{ media procesului este periodica} \\ r_{zz}(t + \tau, t) = r_{zz}(t + \tau + kT, t + kT) \text{ si } r_{zz^*}(t + \tau, t) = r_{zz^*}(t + \tau + kT, t + kT) \end{cases}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Densitatea spectrală de putere (DSP)

- Semnale deterministe – teorema lui Parseval:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

$W(f) = |S(f)|^2$ reprezintă densitatea spectrala de putere a semnalului $s(t)$;

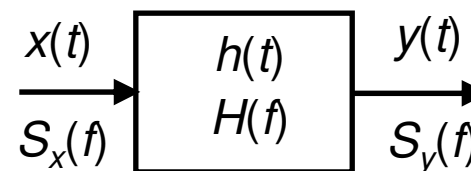
- Semnale aleatoare – Teorema Wiener-Hincine:

$$r_s(\tau) = E\{s(t+\tau)s^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)s^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) e^{j2\pi f\tau} d\tau$$

- DSP pentru un proces complex $z(t) \in \mathbb{C}$: $S_{zz}(f) = W_z(f) = \mathcal{F}\{r_{zz}(\tau)\}$

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f)$$

$$m_y = H(0) \cdot m_x$$



- DSMP pentru un proces ciclostationar:

$$\bar{r}_{zz}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T r_{zz}(t+\tau, t) d\tau \Rightarrow \bar{S}_{zz}(f) = W_z(f) = \mathcal{F}\{\bar{r}_{zz}(\tau)\}$$

Funcția medie de autocorelație

Densitatea spectrală medie de putere

Tehnici de transmisiune digitală a informației

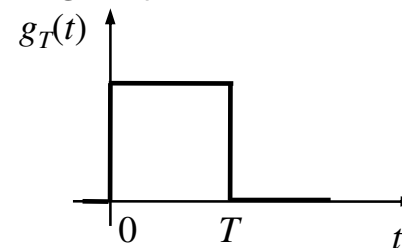
□ Densitatea spectrală de putere

- Pentru modulație în banda de bază fără memorie (MIA digital)

$$s(t) = \sum_n a_n \cdot g_T(t - nT)$$

- $g_T(t)$ impulsul de bază (exp: dreptunghiular);

cu $g_T(t) \in \mathbb{R}$, $G(f) = \mathcal{F}\{g_T(t)\}$



- a_n – simbolul transmis în intervalul $[nT, (n+1)T]$ și $E\{a_n\} = m_a$, $E\{a_{n+k}, a_n\} = r_{aa}(k)$

- Funcția de autocorelație:

$$r_{ss}(\tau) = E\{s(t+\tau)s(t)\} = \sum_k r_{aa}(k) \sum_m g_T(t+\tau - T(k+m)) g_T(t - mT)$$

- Procesul este ciclostacionat cu perioada $T \rightarrow$ Funcția medie de autocorelație:

$$\bar{r}_{ss}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T r_{ss}(t+\tau; t) dt = \frac{1}{T} \sum_k r_{aa}(k) \int_{-\infty}^{+\infty} g_T(u+\tau - kT) g_T(u) du$$

$$\mathcal{F}\{\bar{r}_{ss}(\tau)\} = \bar{S}_{ss}(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \sum_k r_{aa}(k) \cdot e^{-jk2\pi fT} = \frac{1}{T} |G(f)|^2 S_{aa}(f)$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Densitatea spectrală de putere

$$\mathcal{F}\{\bar{r}_{ss}(\tau)\} = \bar{S}_{ss}(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \sum_k r_{aa}[k] \cdot e^{-jk2\pi fT} = \frac{1}{T} |G(f)|^2 S_{aa}(f)$$

$$\bar{S}_{ss}(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \left(r_{aa}[0] - m_a^2 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [r_{aa}[k] - m_a^2] \cos(2\pi k f T) + m_a^2 \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right)$$

• DSMP a semnalului transmis în BB depinde de:

- Proprietățile impulsului de bază: $g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(f)$
- DSP a secvenței emise de sursă: $S_{aa}(f)$

Pt secvența $\{a_n\}$ proces aleator *discret, staționar* cu variabile *mutual necorelate*

$$r_{aa}[k] = E\{a_{n+k} a_n\} = E\{a_{n+k}\} E\{a_n\} = m_a^2 \quad \text{pentru } k \neq 0$$

$$r_{aa}[0] = E\{a_n^2\} = m_a^2 + \sigma_a^2 \delta[k] \quad ; \quad \left(\sigma_a^2 = E\{(a_n - m_a)^2\} = E\{a_n^2\} - m_a^2 \right)$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Densitatea spectrală de putere

- DSsmP pentru proces SSS și variabile mutual necorelate:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ss}(f) &= \frac{1}{T} |G(f)|^2 \left(\sigma_a^2 + m_a \sum_k e^{-jk2\pi fT} \right) = \frac{\sigma_a^2}{T} |G(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T^2} |G(f)|^2 \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \\ &= \underbrace{\frac{\sigma_a^2}{T} |G(f)|^2}_{\substack{\text{partea continua} \\ \text{(contine informatia)}}} + \underbrace{\frac{m_a^2}{T^2} \sum_k \left|G\left(\frac{k}{T}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)}_{\substack{\text{partea discreta} \\ \text{(nu contine informatia} \rightarrow \text{pentru sincronizare de simbol)}}}\end{aligned}$$

- DSsmP pentru procese cu media nulă $m_a=0$

$$\bar{S}_{ss}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |G(f)|^2$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Densitatea spectrală de putere

- Expresii compacte ale DSP pt impuls $g(t)$ dreptunghiular

- NRZ și NRZI

$$W_{s1}(f) = A^2 T \left(\frac{\sin(\pi f \cdot T)}{\pi f \cdot T} \right)^2 = A^2 T \text{sinc}^2(\pi f \cdot T)$$

- Manchester și Manchester dif

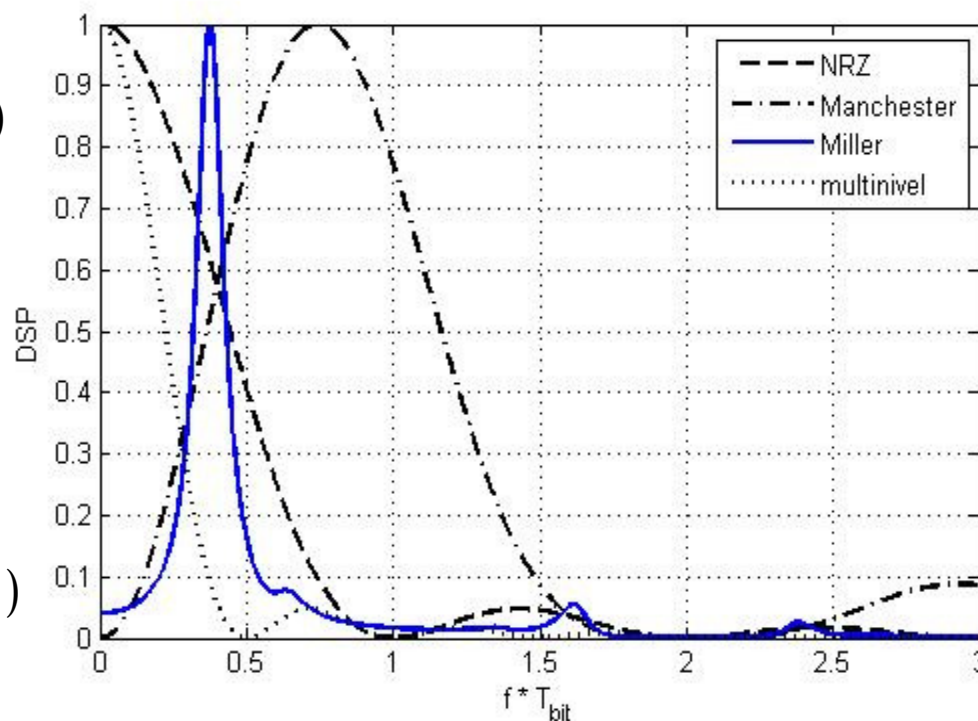
$$W_{s2}(f) = A^2 T \cdot \sin^2\left(\pi f \cdot \frac{T}{2}\right) \cdot \text{sinc}^2\left(\pi f \cdot \frac{T}{2}\right)$$

- multinivel

$$W_{s4}(f) = \frac{d^2 p T_{bit}}{3} (M^2 - 1) \text{sinc}^2(\pi p f T_{bit})$$

- Miller

$$W_{s3}(f) = A^2 T \frac{1 + 4 \cdot \cos(\pi f \cdot T) + 4 \cdot \cos^2(\pi f \cdot T) - 4 \cdot \cos^3(\pi f \cdot T)}{1 - 8 \cdot \cos^2(\pi f \cdot T) + 32 \cdot \cos^4(\pi f \cdot T)} \cdot \text{sinc}^2\left(\pi f \cdot \frac{T}{2}\right)$$



Tehnici de transmisiune digitală a informației

▣ Modulații de tip trece bandă

- purtătoare sinusoidală de frecvență f_c , care are rolul de a translata densitatea spectrală de putere a semnalului modulat în jurul frecvenței f_c . (similar cu modulația analogică);

▪ Exemple de modulație digitale:

- ASK - Amplitude Shift Keying;
- PSK - Phase Shift Keying; (caz partic.: BPSK – Binary PSK);
- QAM - Quadrature Shift Keying;
- FSK - Frequency Shift Keying;
 - CPFSK - Continuous Phase FSK (MSK- Minimum Shift Keying , GMSK – Gaussian Minimum Shift Keying);
 - OFDM – Orthogonal Frequency Division Multiplexing;

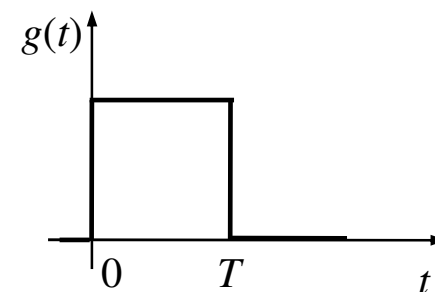
Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ ASK – modulația digitală de amplitudine

Relația:

$$s_{ASK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{m,n} g_T(t-nT) \cos(2\pi f_c t) \quad \text{cu } m=0, \dots, M-1$$

- f_c este frecvența purtătoarei sinusoidale;
- $g(t)$ este impulsul unui semnal real, de durată T ;
- $a_{m,n}$ - valoarea a_m a amplitudinii pe durata intervalului de timp n , $(nT \dots (n+1)T)$



$$\{a_m, 0 \leq m \leq M-1\} \quad M=2^k \quad \text{sup}\{g_T(t)\} = [0, T]$$

$$s_m(t) = \text{Re}\{a_m g_T(t) e^{j2\pi f_c t}\} = a_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \text{cu } m=0, \dots, M-1 \text{ si } 0 \leq t \leq T$$

$$a_m = (2m+1-M)d, \quad m=0, 1, \dots, M-1$$

- $2d$ este distanța dintre două amplitudini adiacente;
- *Debitul binar* = numărul de biți transmiși în unitatea de timp și se măsoară în *biți per secundă* (bps). D_b - debitul binar, \rightarrow perioada de bit, $T_b = 1/R_b$;
- *Rata de simbol (viteză de semnalizare)* = numărul de simboluri transmise în unitatea de timp (1s); se măsoară în *baud* (simb/s). Dacă R este rata de simbol, \rightarrow *perioada de simbol* sau *interval de simbol* (intervalul de timp pe care se transmite un singur simbol), $T = 1/R$;

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ ASK

- Energia medie:

$$\varepsilon_m = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} a_m^2 \int_0^T g_T^2(t) dt = \frac{1}{2} a_m^2 E_g$$

- ε_g energia per o perioadă de simbol a impulsului $g(t)$

▪ Scriere vectorială: $s_m(t) = s_m f(t)$

- simbolul (amplitudinea) transmis s_m

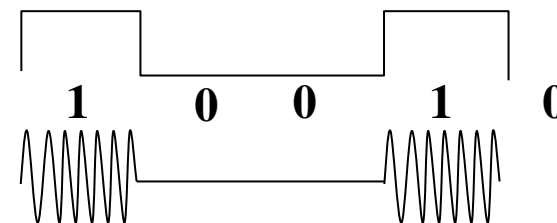
- $f(t)$ - formă de undă comună tuturor simbolurilor, de energie unitară:

$$\int_0^T f^2(t) dt = 1$$

- Funcțiile $f_k(t)$ asociate formelor de undă

Sunt ortonormate (pe perioada de simbol T)

- ASK – o singură dimensiune – o singură funcție $f(t)$;



$$\varepsilon_g = \int_0^T g^2(t) dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \\ s_m = A_m \sqrt{\frac{1}{2} E_g} = 2d \cdot m \sqrt{\frac{1}{2} E_g} \end{array} \right.$$

$$\int_0^T f_{kk}^2(t) dt = 1$$

$$\int_0^T f_{kl}^2(t) dt = 0 \text{ cu } k \neq l$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ ASK

Reprezentarea vectorială – *constelația modulației*:
(Mapare Gray)

- *distanța Euclidiană* dintre două simboluri

$$d_{m,p}^{(e)} = \sqrt{(s_m - s_p)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} E_g |A_m - A_p|} = d \sqrt{2 E_g |m - p|}$$

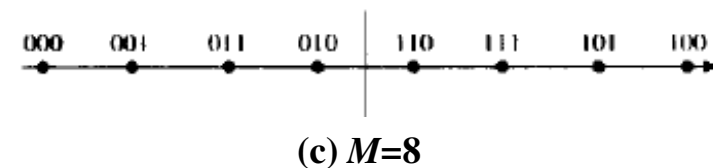
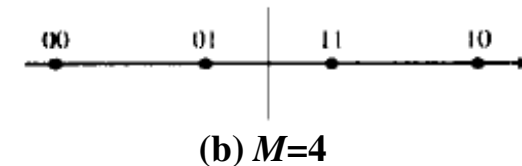
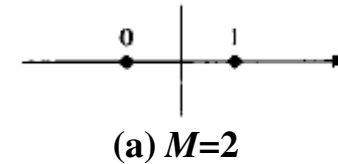
- *distanța Euclidiană minimă* : $d_{\min}^{(e)} = d \sqrt{2 E_g}$

- Detecție eronată de simbol ← valoarea zgomotului > $1/2 \cdot d_{\min}^{(e)}$;

Obs: ASK este de tip BLD;

ASK cu bandă laterală unică (BLU) - *transformata Hilbert*, $\hat{g}_T(t) = \mathcal{H}\{g_T(t)\}$:

$$s_m(t) = \text{Re}\{a_m g_T(t) e^{j2\pi f_c t} \pm j a_m \hat{g}_T(t) e^{j2\pi f_c t}\} \quad \text{cu } m=0, \dots, M-1 \text{ si } 0 \leq t \leq T$$



Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ PSK – modulația digitală de fază

Relația:

$$s_{PSK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A \cos(2\pi f_c t + \theta(t-nT)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_m(t-nT) \quad \text{cu} \quad \theta(t) = \frac{2\pi}{M} \cdot m \cdot p_{\Pi}(t)$$

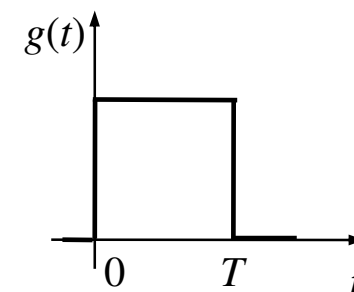
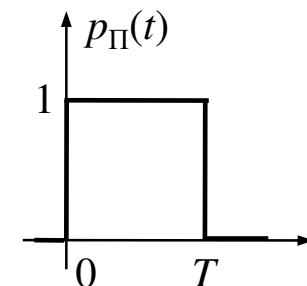
- f_c este frecvența purtătoarei sinusoidale;
- A – amplitudinea purtătoarei;
- $p_{\Pi}(t)$ impulsul de valoare 1 și durată T ;

Formele de undă pentru cele M simboluri diferite (faze diferite):

$$s_m(t) = \text{Re} \left\{ g(t) e^{j2\pi \frac{m}{M}} e^{j2\pi f_c t} \right\} = g(t) \cos \left(2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M} m \right) \quad \text{cu} \quad m=0, \dots, M-1 \text{ și } 0 \leq t \leq T$$
$$= g(t) \cos \left(\frac{2\pi}{M} m \right) \cos(2\pi f_c t) - g(t) \sin \left(\frac{2\pi}{M} m \right) \sin(2\pi f_c t)$$

- $g(t)$ este impulsul unui semnal real, de durată T ;
- Energia semnalelor PSK aceeași pentru toate simbolurile:

$$E_m = \int_0^T s_m^2(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T g^2(t) dt = \frac{1}{2} E_g$$



Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ PSK

- cu funcții ortonormate: $s_m(t) = s_{m1}f_1(t) + s_{m2}f_2(t)$
 - amplitudinile transmise s_{m1} , s_{m2}
 - $f_1(t)$, $f_2(t)$ – funcții ortonormate cu care se descriu formele de undă pentru modulația PSK;
- $$\begin{cases} f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \\ f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g_T(t) \sin(2\pi f_c t) \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} s_{m1} = \sqrt{\frac{E_g}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{M}m\right) \\ s_{m2} = \sqrt{\frac{E_g}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{M}m\right) \end{cases}$$

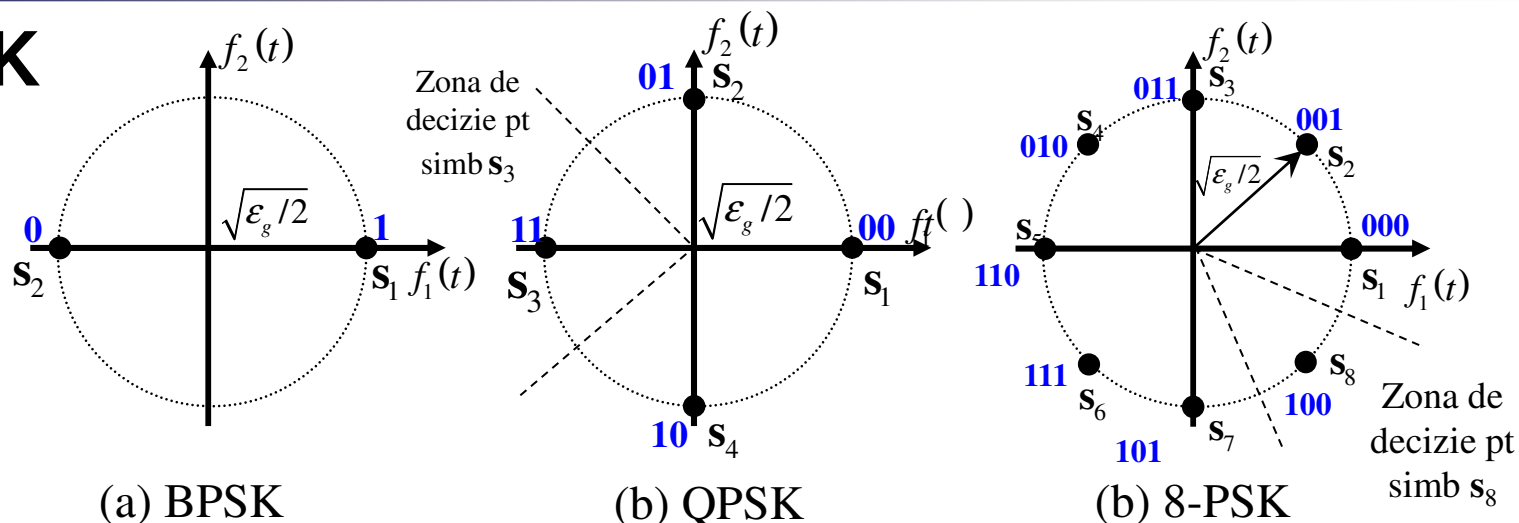
$$\int_0^T f_a(t) f_b(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{pentru } a=b \\ 0 & \text{pentru } a \neq b \end{cases} \quad \text{cu } a, b \in \{1, 2\}$$

- s_m se reprezintă printr-un punct într-un spațiu cartezian, (bidimensional) cu axele reprezentate de cele două funcții $f_1(t)$ și $f_2(t)$:

$$\mathbf{s}_m = [s_{m1} \quad s_{m2}] = \left[\sqrt{\frac{E_g}{2}} \cos\left(\frac{2\pi}{M}m\right) \quad \sqrt{\frac{E_g}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{M}m\right) \right] \quad \text{cu } m=0, \dots, M-1$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ PSK



- *distanța Euclidiană* dintre două simboluri:

$$d_{m,p}^{(e)} = \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_p\| = \sqrt{\frac{E_g}{2} \left(\left[\cos\left(\frac{2\pi}{M}m\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{M}p\right) \right]^2 + \left[\sin\left(\frac{2\pi}{M}m\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{M}p\right) \right]^2 \right)} = \sqrt{E_g \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}(m-p)\right) \right]}$$

- *distanța Euclidiană* minimă:

$$d_{\min}^{(e)} = \sqrt{E_g \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right) \right]}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

- *Exemplu:* BPSK (Binary Phase Shift Keying)

$$s_{BPSK}(t) = \begin{cases} +Ag(t-nT_b)\cos(\omega_c t), & \text{daca } b_n = 1 \\ -Ag(t-nT_b)\cos(\omega_c t) = +Ag(t-nT_b)\cos(\omega_c t + \pi) & \text{daca } b_n = 0 \end{cases}$$

Definid $d(t) = 2 \cdot b_n - 1$, $t \in [nT_b, (n+1)T_b]$; $g_T(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_b)$ cu $E_g = \int_0^{T_b} g_T^2(t) dt = T = T_b$

$$s_{BPSK}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot d(nT_b) g_T(t - nT_b) \cos \omega_c t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \cdot \cos(\omega_c t + d(nT_b) \cdot \pi) \cdot g_T(t - nT_b)$$

- reprezentarea în spațiul semnalelor :

$$\begin{cases} f(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_c t) \\ s_1 = -A \sqrt{\frac{1}{2} T_b} & s_2 = A \sqrt{\frac{1}{2} T_b} \end{cases}$$

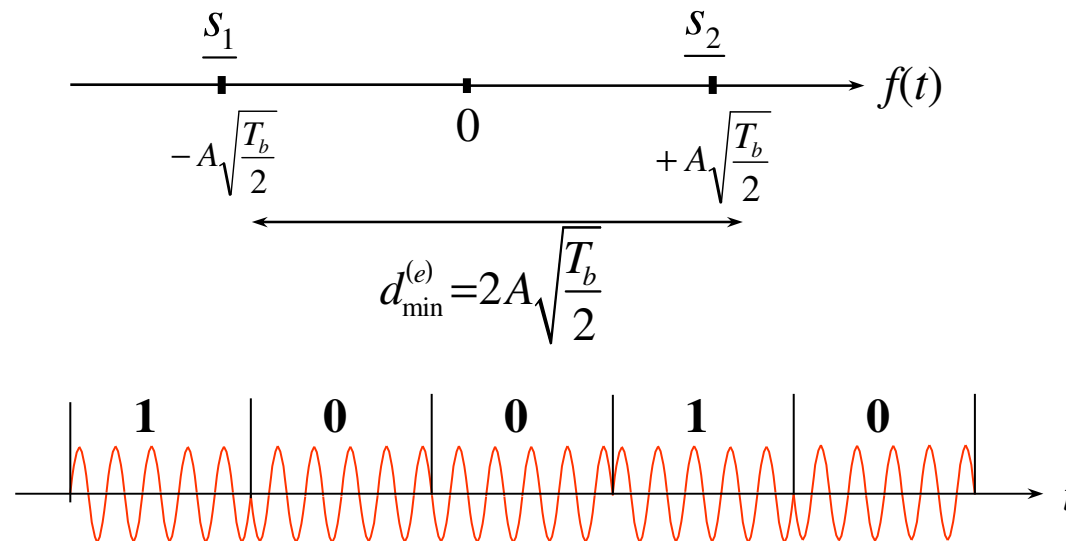
- distanța Euclidiană (minimă):

$$d_{\min}^{(e)} = \sqrt{(s_1 - s_2)^2} = 2A \sqrt{\frac{T_b}{2}}$$

- Debitul binar = viteza de semnalizare ($T_b = T$)

Tehnici de transmisiune digitală a informației

- *Exemplu:* BPSK (Binary Phase Shift Keying)
- Reprezentarea constelației și forma de undă în domeniul timp



Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ QAM

- Se utilizează două purtătoare în cuadratură $\cos(2\pi f_c t)$, $\sin(2\pi f_c t)$;

$$s_{QAM}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[A_{mc,n} \cdot g_T(t-nT) \cdot \cos(2\pi f_c t) - A_{ms,n} \cdot g_T(t-nT) \cdot \sin(2\pi f_c t) \right]$$

- Un simbol din secvența QAM

$$\begin{aligned} s_m(t) &= \operatorname{Re}\left\{ (A_{mc} + jA_{ms}) g(t) e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad \text{cu } m=0, \dots, M-1 \text{ și } 0 \leq t \leq T \\ &= A_{mc} g(t) \cos(2\pi f_c t) - A_{ms} g(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

- A_{mc} și A_{ms} sunt amplitudinile semnalului

Altă reprezentare $s_m(t) = \operatorname{Re}\{V_m e^{j\theta_m} g_T(t) e^{j2\pi f_c t}\} = V_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \theta_m)$ cu $m=0, \dots, M-1$ și $0 \leq t \leq T$

- echivalentul de joasă frecvență al semnalului :

$$\underline{s}_m(t) \Big|_{LF} = V_m e^{j\theta_m} g_T(t) \quad \text{cu } V_m = \sqrt{A_{mc}^2 + A_{ms}^2} \quad \text{și } \operatorname{tg}(\theta_m) = \frac{A_{ms}}{A_{mc}}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ QAM

- reprezentarea cu două funcții ortonormate

$$s_m(t) = s_{m1}f_1(t) + s_{m2}f_2(t) \quad \text{unde} \quad \begin{cases} f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \\ f_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t) \end{cases}$$

- Descrierea sub formă vectorială (un punct în planul constelației simbolurilor)

$$\mathbf{s}_m = [s_{m1} \quad s_{m2}] = \left[A_{mc} \sqrt{\frac{E_g}{2}} \quad A_{ms} \sqrt{\frac{E_g}{2}} \right] \quad \text{cu} \quad m=0, \dots, M-1$$

- Distanța *Euclidiană*

$$d_{m,p}^{(e)} = \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_p\| = \sqrt{\frac{1}{2} E_g \left[(A_{mc} - A_{pc})^2 + (A_{ms} - A_{ps})^2 \right]}$$

- Amplitudini discrete $A_m = (2m+1-M)d$ și $A_p = (2p+1-M)d$ $m, p=0, 1, \dots, M-1$

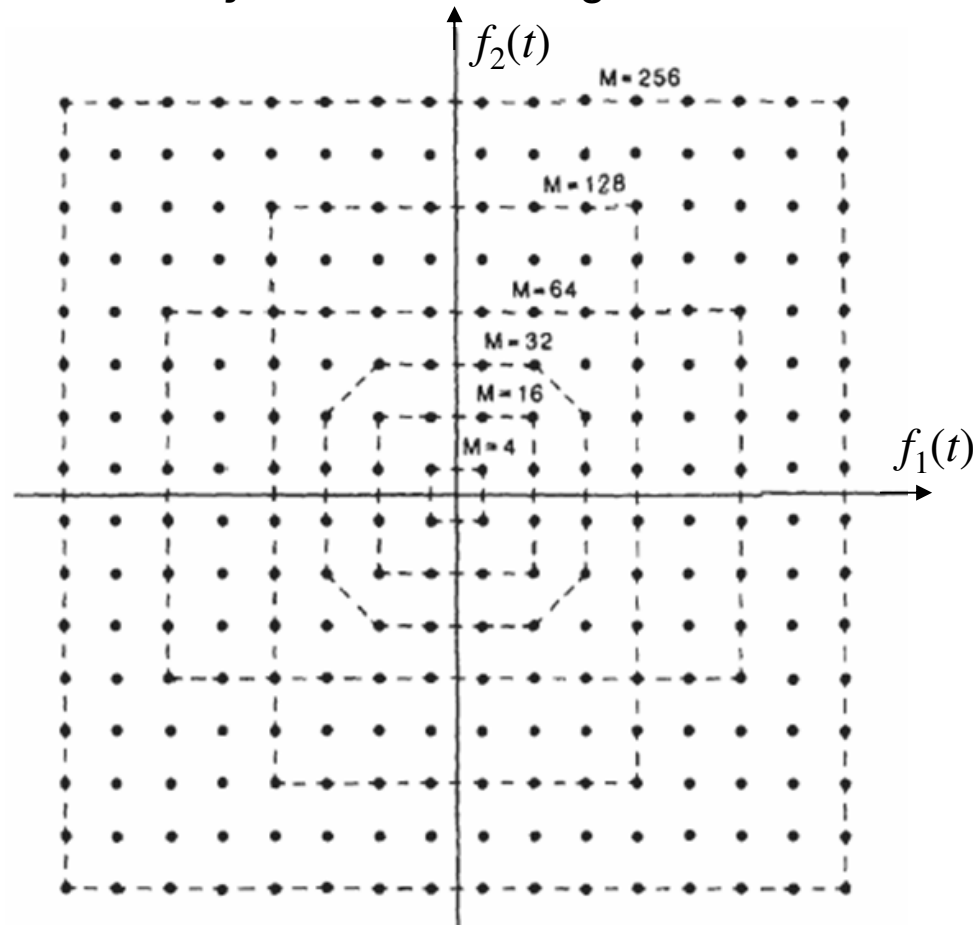
- Distanța *Euclidiană minimă* : $d_{\min}^{(e)} = d \sqrt{2E_g}$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ QAM

- Reprezentarea constelațiilor modulațiilor QAM rectangulare:

$$M \in \{4, 16, 32, 64, 128, 256\}$$



Tehnici de transmisiune digitală a informației

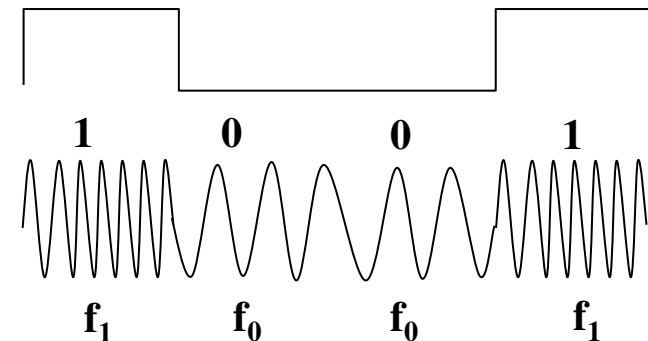
□ FSK

- o bandă de frecvență de lărgime $M\Delta f$ este divizată în M subbenzi, fiecare de lărgime Δf ; pe fiecare sub-bandă se transmite sau nu câte o purtătoare în funcție de semnalul informațional digital.

Relația:

$$s_m(t) = \text{Re} \left\{ \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cdot e^{j2\pi(m\Delta f)t} e^{j2\pi f_c t} \right\} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cos(2\pi f_c t + 2\pi m\Delta f t) \quad \text{cu } m=0, \dots, M-1 \text{ și } 0 \leq t \leq T$$

Modulația BFSK în timp:



- echivalentul de joasă frecvență (*anvelopa complexă*)

$$s_{lm}(t) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{T}} \cdot e^{j2\pi(m\Delta f)t} \quad \text{cu } m=0, \dots, M-1 \text{ și } 0 \leq t \leq T$$

- Toate formele de undă (simbolurile) au aceeași energie pe $T \int_0^T |s_{lm}(t)|^2 dt = 2E_s$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ FSK

- Se definește coeficientul de corelație dintre două forme de undă :

$$\rho_{mn} = \frac{1}{2E_S} \int_0^T s_{lm}(t) s_{ln}^*(t) dt = \frac{2E_S}{2E_S T} \int_0^T e^{j2\pi(m-n)\Delta f t} dt = \frac{\sin[\pi T(m-n)\Delta f]}{\pi T(m-n)\Delta f} e^{j\pi T(m-n)\Delta f}$$

- Cu partea reală: $\rho_r = \text{Re}\{\rho_{mn}\} = \frac{\sin[\pi T(m-n)\Delta f]}{\pi T(m-n)\Delta f} \cdot \cos[\pi T(m-n)\Delta f]$

- Pt simboluri independente trebuie ca: $\rho_r = 0 \Rightarrow \Delta f = \frac{k}{2T}$ cu $m \neq n, k \in \mathbb{Z}$

- distanța minimă dintre două subpurtătoare adiacente: $\Delta f = \frac{1}{2T}$ pentru $|m-n|=1$

- Reprezentarea vectorială a modulației M-FSK
într-un spațiu M -dimensional:

$$\begin{cases} \mathbf{s}_1 = [\sqrt{E_S} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0] \\ \mathbf{s}_2 = [0 & \sqrt{E_S} & 0 & \dots & 0 & 0] \\ \vdots \\ \mathbf{s}_M = [0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{E_S}] \end{cases}$$

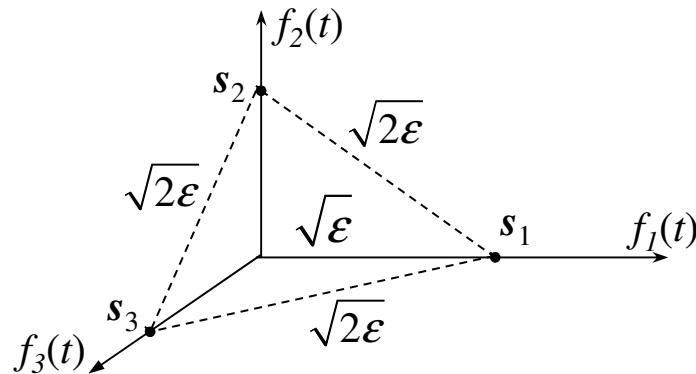
- distanța Euclidiană dintre simbolurile m și n
egală cu distanța minimă:

$$d_{m,n}^{(e)} = \|\mathbf{s}_m - \mathbf{s}_n\| = \sqrt{2E_S} = d_{\min}^{(e)}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ FSK

- Reprezentarea în spațiul vectorial a modulației 3-FSK



- Numărul de frecvențe utilizat este o putere a lui 2 (egal cu numărul de simboluri ale modulației);
- Un caz particular îl reprezintă modulația BPSK sau M-QAM a fiecărei frecvențe ortogonale cu un alt simbol → OFDM;



Tehnici de transmisiune digitală a informației

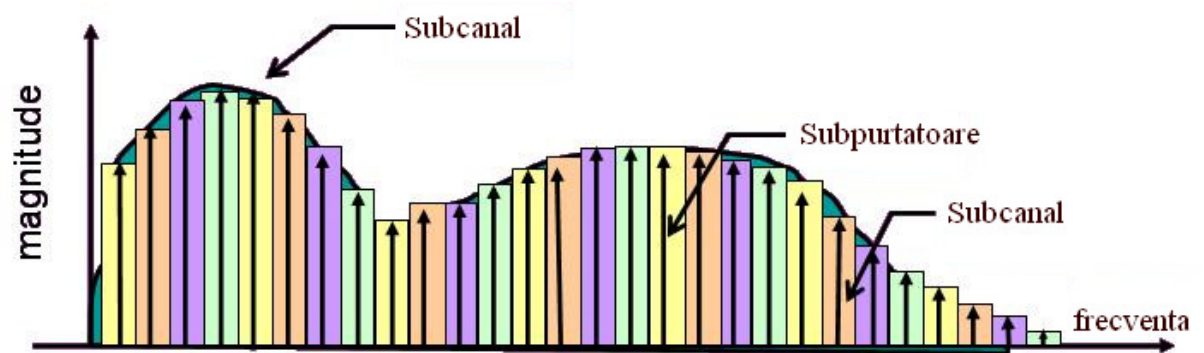
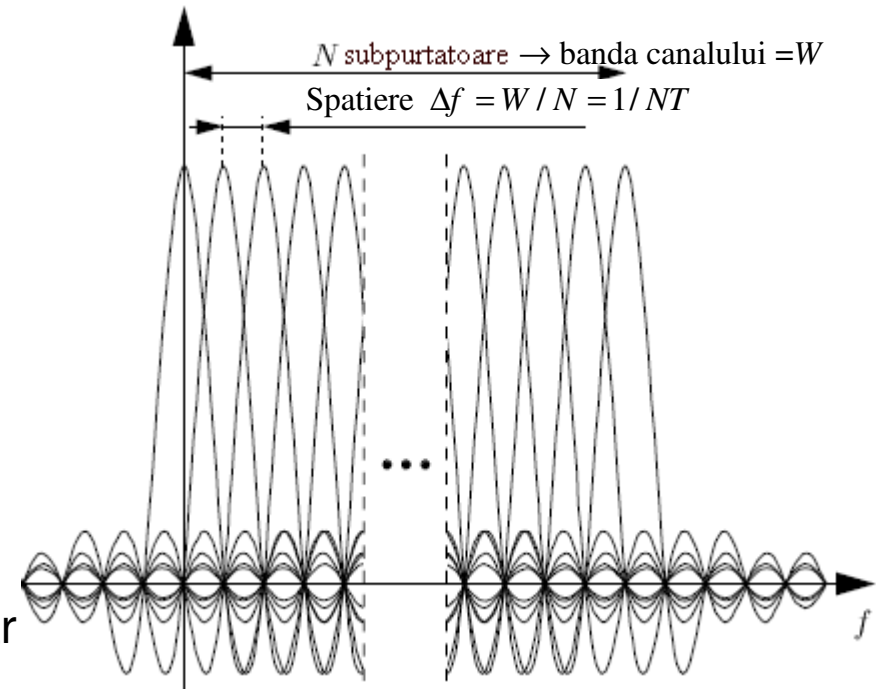
▣ Alte tipuri de modulații digitale

- QPSK (Quadrature Phase Shift Keying) – 2 biți per simbol;
- OQPSK (offset-QPSK) – reducerea benzii de frecvență;
- DPSQ (Differential QPSK) – demodulare necoerentă;
- CPSK (continuous PSK) – reducerea benzii de frecvență;
- MSK (Minimum-shift keying) – modulație binară FSK cu banda minimă;
- GMSK(Gaussian MSK) – modulație MSK cu impuls Gaussian, utilizată în GSM – modulația pe interfața radio;
- OFDM (Orthogonal frequency-division multiplexing) schemă de modulație complexă care reduce efectul ISI.

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Tehnica OFDM

- Tip special de modulație în frecvență;
- Se împarte spectrul disponibil în mai multe *subcanale* (*subpurtătoare*);
- Fiecare canal este de bandă îngustă (fading plat) – nu introduce ISI;
- Pe fiecare subpurtătoare se modulează un alt simbol de transmis de la același emițător (se utilizează impuls dreptunghiular sau cosinus ridicat);
- Pentru emisie se grupează N simboluri în *cadre* sau *simboluri OFDM*;
- Implementare simplă cu IFFT și FFT;



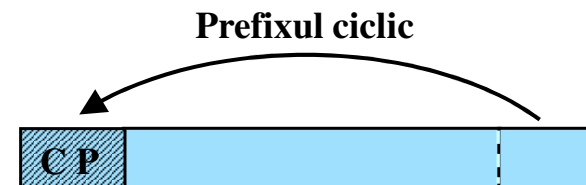
Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Tehnica OFDM

- Expresia semnalului modulat OFDM

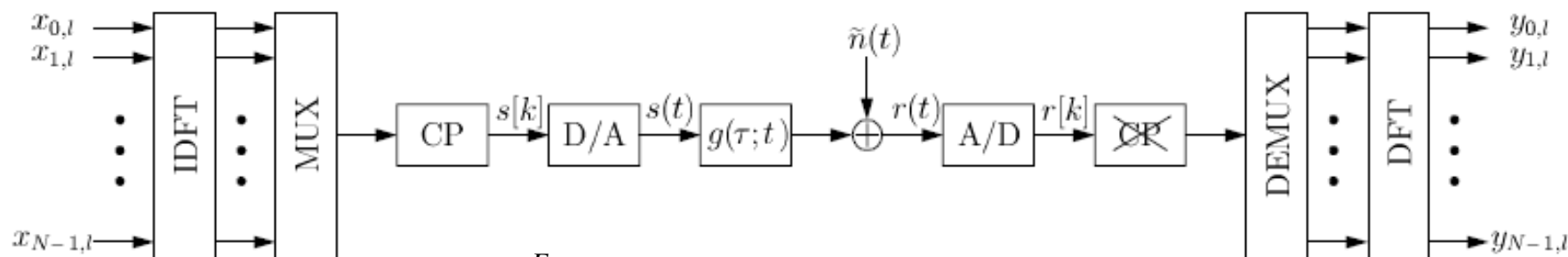
$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x_{k,l} \phi_k(t - lT)$$

$$\phi_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T - T_{cp}}} \cdot \exp\left[j2\pi \frac{W}{N} k (t - T_{CP}) \right] & , \text{ pt } t \in [0, T] \\ 0 & , \text{ in rest} \end{cases}$$



- T durata simbolului OFDM
- T_{CP} durata prefixului ciclic
- W lărgimea de bandă a canalului;
- N numărul de subpurtoare

- Porțiunea de la sfârșitul simbolului OFDM se repetă la început – prefixul ciclic;



- Capacitatea OFDM: $C = \int_{F_L}^{F_H} \log_2 [1 + \rho(f)] df$

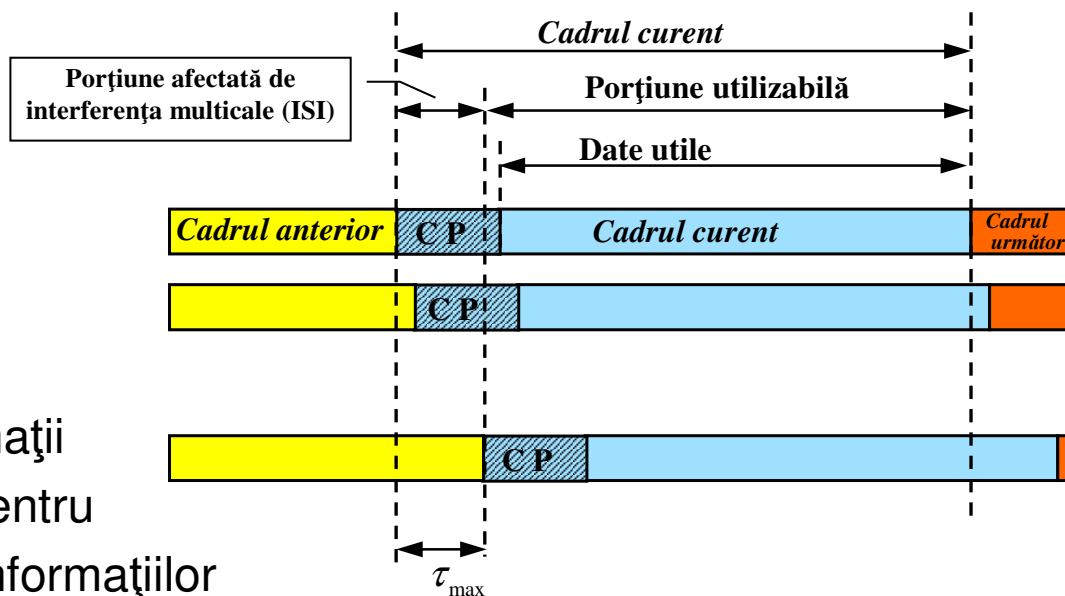
F_L, F_H – frecv min și max ale canalului
 $\rho(f)$ – SNR per Hz

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Tehnica OFDM

- Prefixul ciclic conține toată ISI datorată întârzierilor căilor diferite de propagare, dacă $T_{CP} > \tau_{max}$ (întârzierea maximă);
- CP asigură ortogonalitatea subpurtătoarelor în semnalul recepționat ($ICI=0$);
- La recepție, datele aferente prefixului ciclic se elimină;
- Implică o reducere a SNR echivalent și a capacității de $(T - T_{CP}/T)$ ori;

$$SNR_{LOSS} = -10 \log_{10} \left(1 - \frac{T_{CP}}{T} \right)$$



Obs:

- OFDM permite multiplexarea mai multor tipuri de informații pe subpurtătoare diferite: informații de date, pentru sincronizare, pentru estimarea canalului, și chiar a informațiilor de la mai mulți utilizatori → OFDMA (□cce□ mul□plu cu diviziune în OF);

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ DSsmP pt modulațiile de tip trece bandă

Se definește $s_{LF}(t)$ echivalentul de joasă frecvență al semnalului modulat trece bandă $s(t)$.

$$s(t) = \text{Re}\{s_{LF}(t) \cdot e^{j2\pi f_c t}\} \quad \text{cu} \quad s_{LF}(t) = \sum_n a_m g_T(t - nT)$$

- a_m secvență de v.a. complexe, cu funcția discretă de autocorelație $r_{aa}[k]$;
- $g_T(t)$ – impuls determinist (de joasă frecvență);
- $s_{LF}(t)$ – proces ciclostacionar cu perioada T (pt medie și fct autocorelație);
- DSsmP pentru semnalul modulat de tip trece bandă:

$$\bar{S}(f) = \frac{1}{4} \bar{S}_{s_{LF}s_{LF}}(f - f_c) + \frac{1}{4} \bar{S}_{s_{LF}s_{LF}}(f + f_c)$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

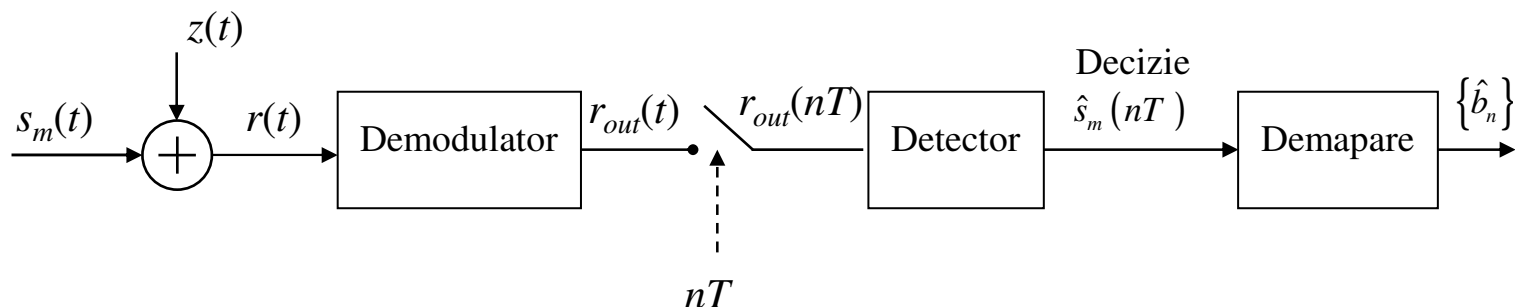
□ Receptorul optim

- Criteriul: *rata de eroare binară* (BER – bit error rate).

Modelul recepției pentru un canal AWGN (cu zgomot aditiv, alb, Gaussian):

$$r(t) = s_m(t) + z(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

- La recepție: reducerea efectului zgomotului, detecție de simbol, *demapare*.



- SNR maxim la $t=nT$, la ieșirea demodulatorului, cu funcția de transfer $H(f)$:

$$\left(\frac{P_r}{P_{noise}} \right)_{out} = \frac{r_{out}^2(t_0)}{z_{out}^2(t_0)} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) S(f) e^{j2\pi t_0 f} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \mathcal{P}_{zz}(f) df} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S(f)|^2}{\mathcal{P}_{zz}(f)} df \stackrel{\max}{\Rightarrow} H(f) = S^*(f) e^{-j2\pi t_0 f}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Receptorul optim

- SNR_{\max} la ieșirea demodulatorului:

$$H(f) = S(f)^* e^{-j2\pi fT} \Leftrightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = s(T-t) \Rightarrow \left(\frac{P_r}{P_{\text{noise}}}\right)_{\text{out}} = \frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df}{N_0} = \frac{2 \int_0^T s^2(t) dt}{N_0} = \frac{2E_s}{N_0}$$

- $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ - funcțiile ortonormate

Realizare:

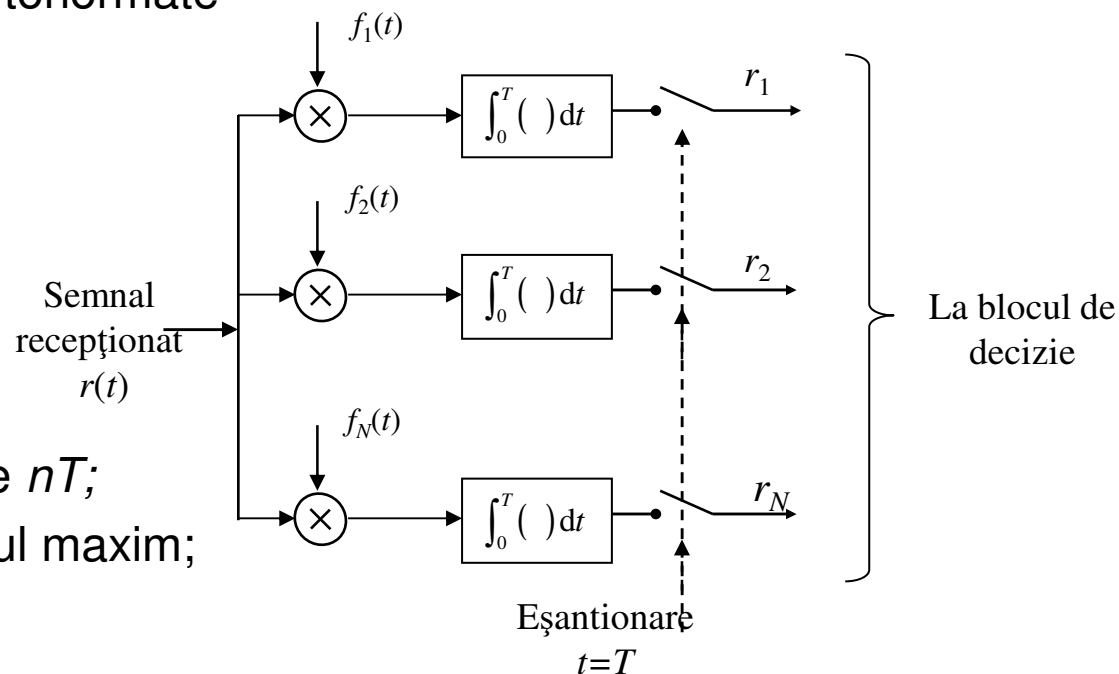
- Înmulțire cu funcțiile

Ortonormate;

- Integrare pe o perioadă de simbol T ;

- Se eșantionează la momentele nT ;

- Se decide simbolul cu rezultatul maxim;



Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Probabilitatea de eroare binară (semnal real)

- Se consideră modulația BPSK: $s_1(t) = -s_2(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [nT_b, (n+1)T_b]$
- semnalul eșantionat cu perioada T la ieșirea *filtrului adaptat formei de undă* :

$$r(nT) = r_n = r_{n\text{out}} + z_{n\text{out}} = \pm \sqrt{E_S} + z_{n\text{out}} \text{ cu } E_S = \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt = \int_0^{T_b} s_2^2(t) dt \text{ si } z_{n\text{out}} \in \mathbb{R}, \sigma_{z_{\text{out}}}^2 = \frac{N_0}{2}$$

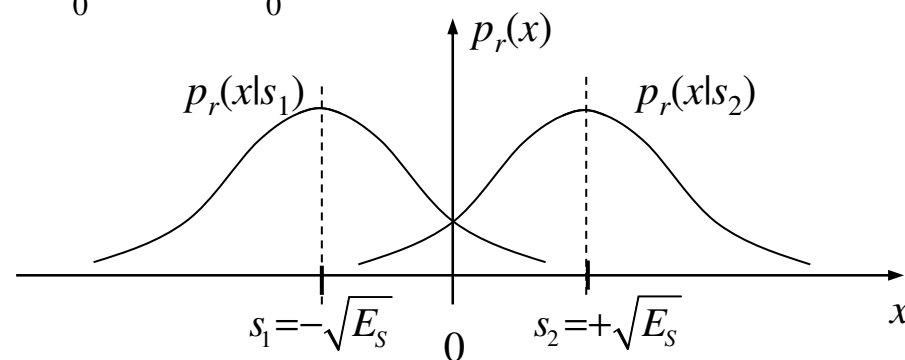
- Probabilitățile de decizie sunt:

$$P_{r_{\text{out}}}(r_{\text{out}} = x | s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \cdot \exp\left(-\frac{(x + \sqrt{E_S})^2}{N_0}\right)$$

$$P_{r_{\text{out}}}(r_{\text{out}} = x | s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \sqrt{E_S})^2}{N_0}\right)$$

$$P_b = P(r < 0 | s_2) \cdot P(s_2) + P(r > 0 | s_1) \cdot P(s_1) = P_S$$

$$P_b = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{+\infty} P_{r_{\text{out}}}(x | s_1) dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^0 P_{r_{\text{out}}}(x | s_2) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{\sqrt{2E_S}}{\sqrt{N_0}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = Q\left(\sqrt{\frac{2E_S}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^{(e)2}}{2N_0}}\right)$$



probabilitatea de eroare binară
egală cu a simbolurilor

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Probabilitatea de eroare de simbol (pt AWGN)

- În funcție de tipul de mapare al biților.
$$\frac{P_s}{\log_2 M} \leq P_b \leq P_s$$

- ε_b , ε_s - energia medie per bit (T_b), respectiv per simbol (T) transmis;

- M - ASK (multinivel)
$$P_s = P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{d^2 E_g}{N_0}}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \cdot E_{s av}}{(M^2-1)N_0}}\right)$$

- M - PSK

- BPSK-
$$P_b = P_s = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

- QPSK ($M=4$)
$$P_s = P_4 = 1 - (1 - P_2)^2 = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \left[1 - \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)\right]$$

- M -PSK ($M>4$)
$$P_s = P_M \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0} \cdot \sin \frac{\pi}{M}}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot \log_2 M \cdot E_b}{N_0} \cdot \sin \frac{\pi}{M}}\right)$$

- M -FSK
$$P_s = P_M \leq (M-1) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_{s av}}{N_0}}\right) = (M-1) \cdot Q\left(\sqrt{\log_2(M) \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Probabilitatea de eroare binară

- M – QAM (rectangulară)

$$P_M = 1 - \left[1 - 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \cdot \frac{\mathcal{E}_{S\ av}}{N_0}} \right) \right]^2$$

- $\mathcal{E}_{S\ av}$, $P_{S\ av}$ - energia medie, respectiv puterea medie per simbol transmis;
- $\mathcal{E}_{b\ av}$ - energia medie per bit transmis;

$$P_{av} = \frac{d^2}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (A_{mc}^2 + A_{ms}^2) , \quad \mathcal{E}_{S\ av} = P_{S\ av} \cdot T , \quad \mathcal{E}_{b\ av} = \frac{\mathcal{E}_{S\ av}}{\log_2 M} = \frac{\mathcal{E}_{S\ av}}{k}$$

$$P_M \leq 1 - \left[1 - 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \cdot \frac{\mathcal{E}_{av}}{N_0}} \right) \right]^2 \leq 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \cdot Q \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2 M}{M-1} \cdot \frac{\mathcal{E}_{b\ av}}{N_0}} \right)$$

- Cu aceeași putere medie per simbol, și același M , modulația M-QAM are performanțe mai bune decât M-PSK;

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Prob. de eroare binară - QPSK (4QAM)

• QPSK (4QAM) – Prob. eroare se obține independent pt comp. în fază (I) și în cuadratură (Q) la fel ca pentru BPSK (cos(), sin())

$$r_n = r_{I,n} + jr_{Q,n} \text{ cu } E_s = 2d^2 \text{ și } 2\sigma_{\text{noise}_{I,Q}}^2 = N_0$$

Regula de decizie a biților este:

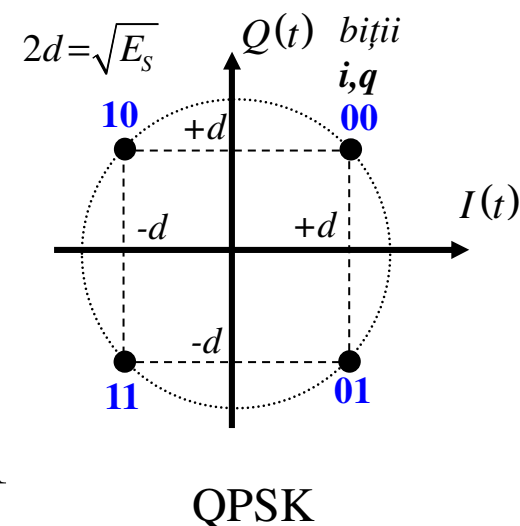
$$r_{I,n}, r_{Q,n} > 0 \Rightarrow q, i=0 ; r_{I,n}, r_{Q,n} < 0 \Rightarrow q, i=1$$

Aplicând rel. Prob. err. de la BPSK pt $I(t)$ și $Q(t)$

$$P_{err,I} = Q\left(\frac{d}{\sigma_{\text{noise}_I}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \quad P_{err,Q} = Q\left(\frac{d}{\sigma_{\text{noise}_Q}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

Mediind prob. de eroare pt. cele 2 modulații BPSK care compun QPSK

$$P_{QPSK} = \frac{1}{2}(P_{err,I} + P_{err,Q}) = Q\left(\frac{d}{\sigma_{\text{noise}_{I,Q}}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

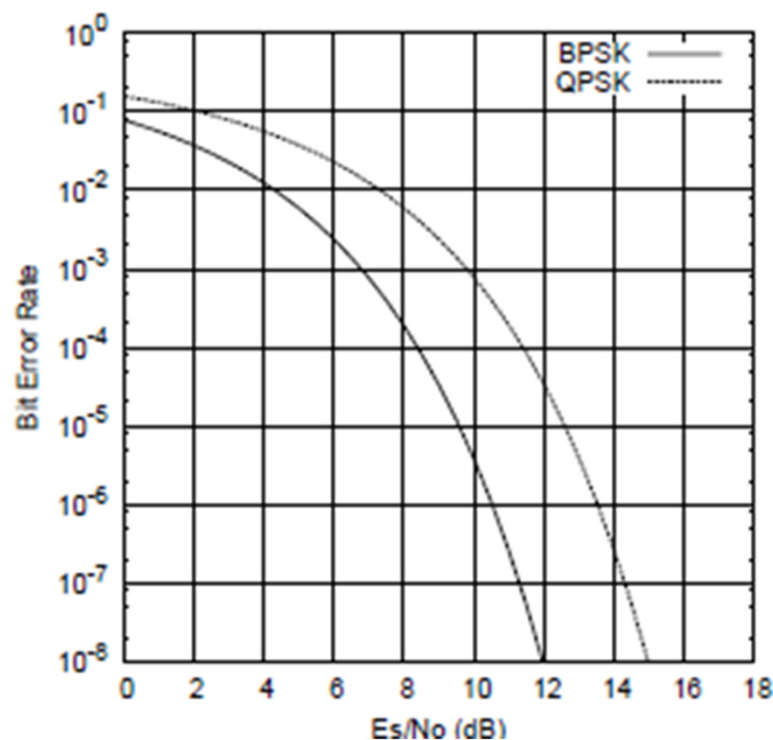


Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Prob. de eroare binară - QPSK (4QAM)

- comparație QPSK vs BPSK:
- pt. aceeași rată binară R_b , QPSK consumă $1/2$ față de banda BPSK
- pt. aceeași prob. err. puterea semnalului QPSK recepționat este dublă (+3dB) față de puterea BPSK
- Curba $P_{err} = \text{fct}(E_S/N_0)$ are un câștig de 3dB la BPSK vs QPSK
- Curba $P_{err} = \text{fct}(E_b/N_0)$ este identică la BPSK vs QPSK

$$P_{QPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}\right) \quad P_{BPSK} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_S}{N_0}}\right)$$



Tehnici de transmisiune digitală a informației

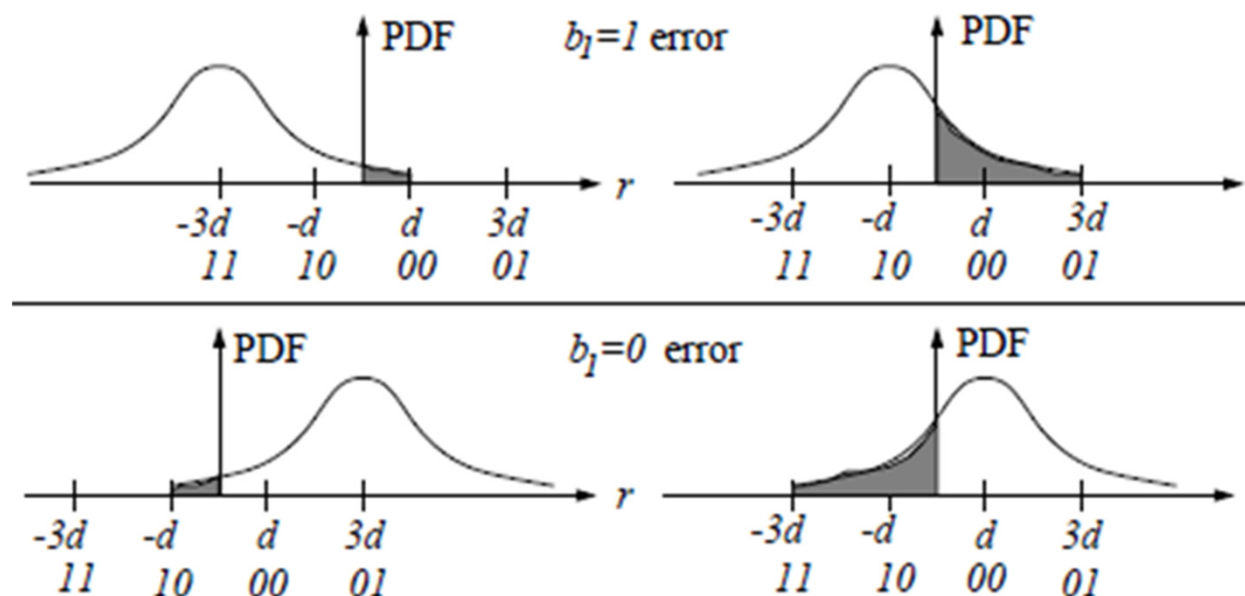
□ Prob. de eroare binară – 4-ASK

▪ pentru QPSK cu codare Gray: $b_1 b_2 : 01, 00, 10, 11 \rightarrow 3d, d, -d, -3d$
 biții b_1 și b_2 de pe un simbol, au imunitate diferită la zgomot (nu e const.)

- Pt bitul b_1 regula de decizie este - $r > 0 \rightarrow b_1 = 0, \quad r \leq 0 \rightarrow b_1 = 1$

- Prob err a bitului b_1 :

$$\begin{aligned}
 P_{e,1} &= \frac{2}{4}Q(d/\sigma_n) \\
 &+ \frac{2}{4}Q(3d/\sigma_n) \\
 &= \frac{1}{2}Q(d/\sigma_n) \\
 &+ \frac{1}{2}Q(3d/\sigma_n)
 \end{aligned}$$



- bitul b_1 are o distanța d până la pragul de decizie 50% din cazuri, iar in celelalte 50%, distanța $3d$.

BER pentru Canal AWGN – modulatii multinivel

16QAM Bit Error Rate

- 16QAM: I and Q are both 4-ary

– C1 bit decision:

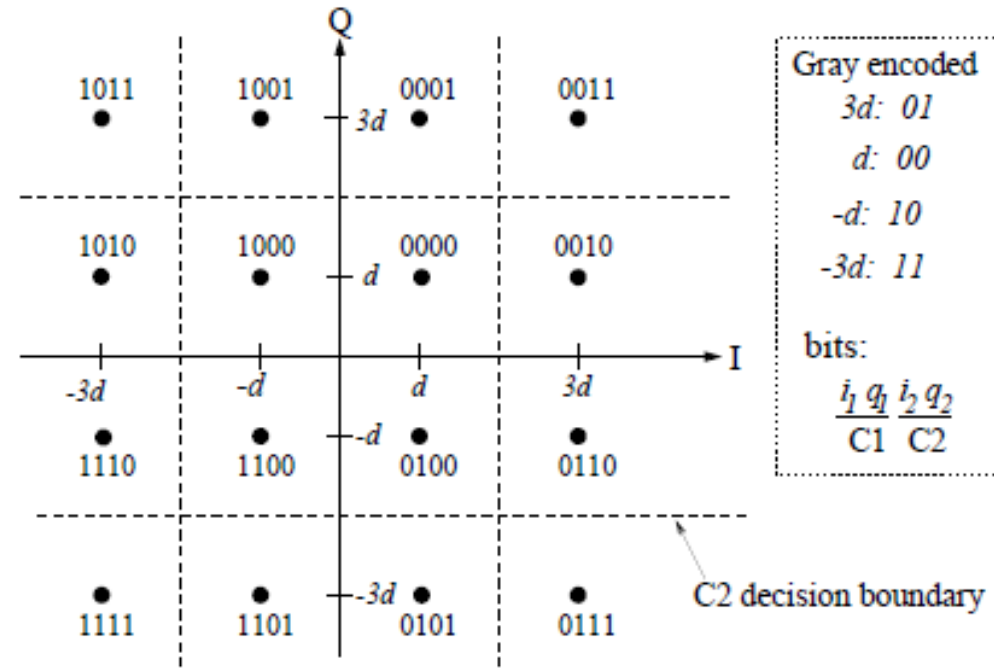
$$I, Q > 0 \rightarrow i_1, q_1 = 0$$

$$I, Q \leq 0 \rightarrow i_1, q_1 = 1$$

– C2 bit decision:

$$I, Q > 2d \text{ or } I, Q \leq -2d \\ \rightarrow i_2, q_2 = 1$$

$$-2d < I, Q \leq 2d \\ \rightarrow i_2, q_2 = 0$$



- Signal power $E_s = 10d^2$ and noise power $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \rightarrow d/\sigma_n = \sqrt{E_s/5N_0}$, and 16QAM BER:

$$P_e = \frac{1}{2}(P_{e,I} + P_{e,Q}) = \frac{3}{4}Q\left(\frac{d}{\sigma_n}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3d}{\sigma_n}\right) - \frac{1}{4}Q\left(\frac{5d}{\sigma_n}\right)$$

$$= \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{E_s/5N_0}\right) + \frac{1}{2}Q\left(3\sqrt{E_s/5N_0}\right) - \frac{1}{4}Q\left(5\sqrt{E_s/5N_0}\right)$$

BER pentru Canal AWGN – modulatii multinivel

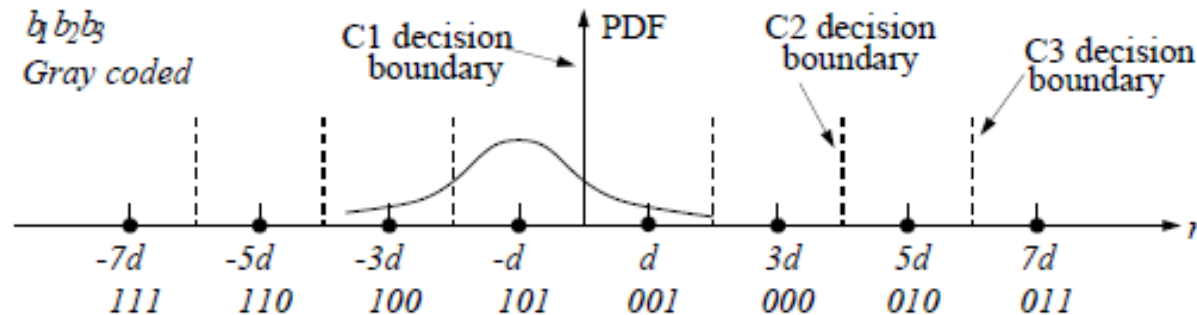
8-ary Constellation BER

- 8-ary: $b_1 b_2 b_3$ Gray coded. 3 classes of bits, C1 b_1 has the highest immunity to noise, and C3 b_3 has the lowest, as though these three classes of bits were transmitted through 3 different sub-channels
 - One C1 decision boundary, two C2 decision boundaries, and four C3 decision boundaries

- C1 decision rule:

$$\begin{aligned} r > 0 &\rightarrow b_1 = 0 \\ r \leq 0 &\rightarrow b_1 = 1 \end{aligned}$$

Thus, conditional error rate for symbol $-7d$ is $Q(7d/\sigma_n)$ and so on



- C1 bit error rate:

$$P_{e,1} = \frac{1}{4} (Q(d/\sigma_n) + Q(3d/\sigma_n) + Q(5d/\sigma_n) + Q(7d/\sigma_n))$$

- C2 decision: $r > 4d$ or $r \leq -4d \rightarrow b_2 = 1$, $-4d < r \leq 4d \rightarrow b_2 = 0$

$$\begin{aligned} P_{e,2} &= \frac{1}{2}Q(d/\sigma_n) + \frac{1}{2}Q(3d/\sigma_n) + \frac{1}{4}Q(5d/\sigma_n) + \frac{1}{4}Q(7d/\sigma_n) \\ &\quad - \frac{1}{4}Q(9d/\sigma_n) - \frac{1}{4}Q(11d/\sigma_n) \end{aligned}$$

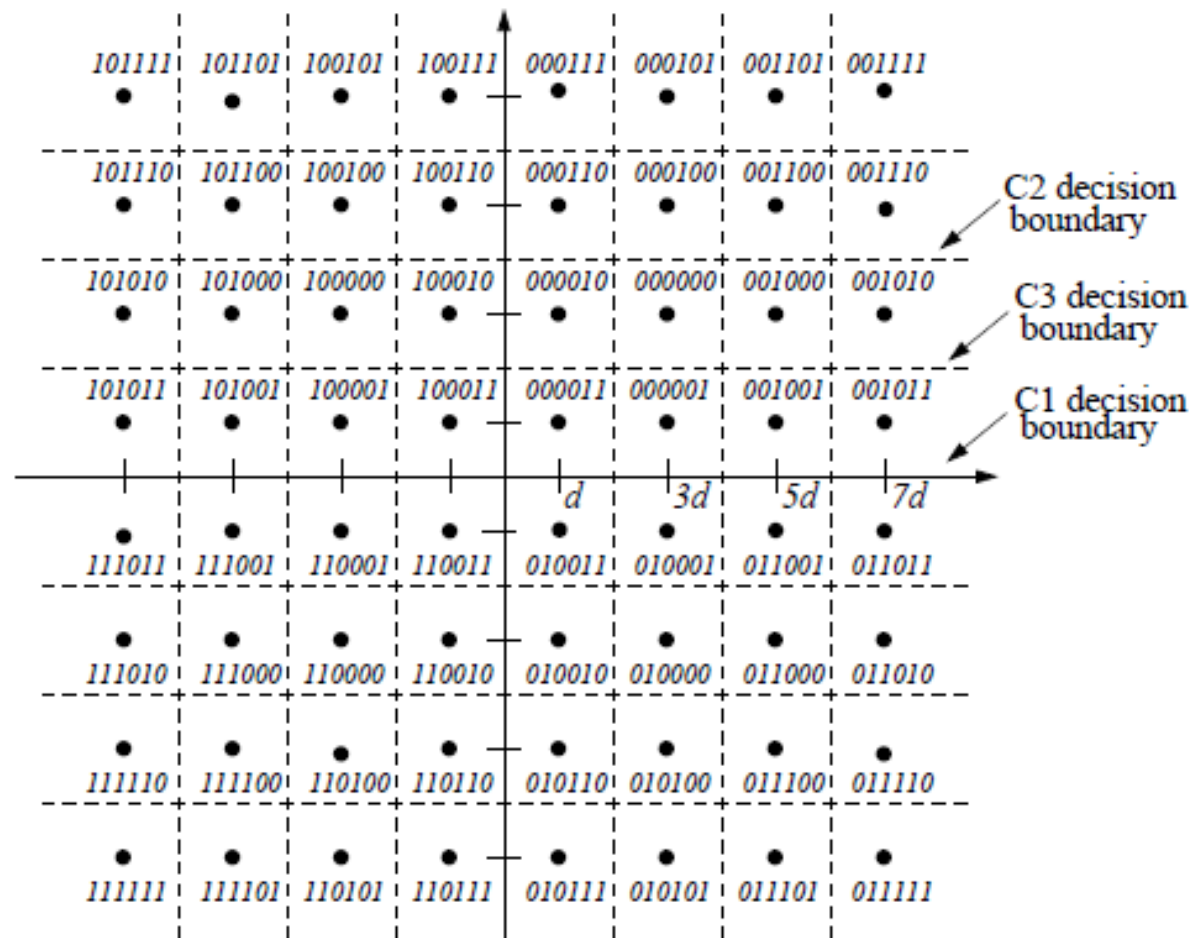
BER pentru Canal AWGN – modulatii multinivel

64QAM Bit Error Rate

- 64QAM: $i_1q_1i_2q_2i_3q_3$

Three classes of bits

I & Q are identical to 8-ary



Tehnici de transmisiune digitală a informației

64QAM BER (continue)

- C1 decision: $I, Q > 0 \rightarrow i_1, q_1 = 0, I, Q \leq 0 \rightarrow i_1, q_1 = 1$
- C2 decision: $I, Q > 4d$ or $I, Q \leq -4d \rightarrow i_2, q_2 = 1$
 $-4d < I, Q \leq 4d \rightarrow i_2, q_2 = 0$
- C3 decision: $I, Q > 6d$ or $I, Q \leq -6d$ or $-2d < I, Q \leq 2d \rightarrow i_3, q_3 = 1$
 $-6d < I, Q \leq -2d$ or $2d < I, Q \leq 6d \rightarrow i_3, q_3 = 0$

- Average error of 64QAM is:

$$P_e = \frac{7}{12}Q(d/\sigma_n) + \frac{1}{2}Q(3d/\sigma_n) - \frac{1}{12}Q(5d/\sigma_n) + \frac{1}{12}Q(9d/\sigma_n) - \frac{1}{12}Q(13d/\sigma_n)$$

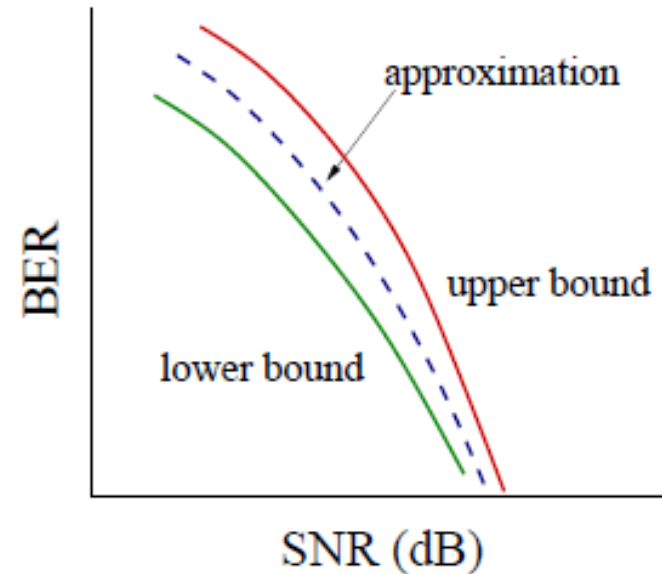
- Noting the average symbol energy of 64QAM is $E_s = 42d^2$,

$$P_e = \frac{7}{12}Q\left(\sqrt{E_s/21N_0}\right) + \frac{1}{2}Q\left(3\sqrt{E_s/21N_0}\right) - \frac{1}{12}Q\left(5\sqrt{E_s/21N_0}\right) \\ + \frac{1}{12}Q\left(9\sqrt{E_s/21N_0}\right) - \frac{1}{12}Q\left(13\sqrt{E_s/21N_0}\right)$$

BER pentru Canal AWGN – modulatii multinivel

General Comments

- For generic high-order QAM, derive approximate bit error rate as $Q(\sqrt{\text{SNR}_{\text{equivalent}}})$
 - In theory, one can define the upper bound which is larger than true BER
 - and the lower bound which is smaller than true BER
 - By making the two bounds very tight, ensure the approximation is very accurate
- In general, union bound is derived, which is very accurate approximation to represent the true bit error rate
 - In practice, union bound is often used to represent the BER of high-order QAM
- One may just simply use Monte Carlo simulation to evaluate the system's bit error rate
 - Sending large number of bits, and simply counting the bit errors: if total number of bits sent is N_b , and error counts is N_e
$$\text{BER} \approx \frac{N_e}{N_b}$$
 - How accurate this approximation? You must ensure at least a few hundreds of error counts!
- Systems like fibre networks, $\text{BER} < 10^{-9} \sim 10^{-12}$, may have to build prototype to evaluate, or
 - Importance sampling simulation may be adopted to evaluate these systems





BER pentru Canal AWGN – modulatii multinivel

Tehnici de transmisiune digitală a informației

□ Probabilitatea de eroare binară

- M – QAM (rectangulară)

Table 4.1
BER Performance in Conventional Modulation Schemes

Modulation Scheme	Theoretical BER	
	AWGN	One-Path Rayleigh Fading
BPSK	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{E_b/N_0}\right)$	$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{E_b/N_0}}} \right]$
QPSK	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{E_b/N_0}\right)$	$\frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{E_b/N_0}}} \right]$
16-QAM	$\frac{3}{8} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{5} E_b/N_0}\right) - \frac{9}{24} \operatorname{erfc}^2\left(\sqrt{\frac{2}{5} E_b/N_0}\right)$	$\frac{3}{8} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 5/(2E_b/N_0)}} \right]$
64-QAM	$\frac{7}{24} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{1}{7} E_b/N_0}\right) - \frac{49}{384} \operatorname{erfc}^2\left(\sqrt{\frac{1}{7} E_b/N_0}\right)$	$\frac{7}{24} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 7/(E_b/N_0)}} \right]$
256-QAM	$\frac{15}{64} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{4}{85} E_b/N_0}\right) - \frac{225}{2,048} \operatorname{erfc}^2\left(\sqrt{\frac{4}{85} E_b/N_0}\right)$	$\frac{15}{64} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 85/(4E_b/N_0)}} \right]$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Funcția $Q(x)$ și eroare complementară $erfc(x)$

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^{\infty} \exp(-\tau^2) d\tau = 1 - \text{erf}(x)$$

$$erfc(x) \cong \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \dots \right)$$

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) d\tau = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

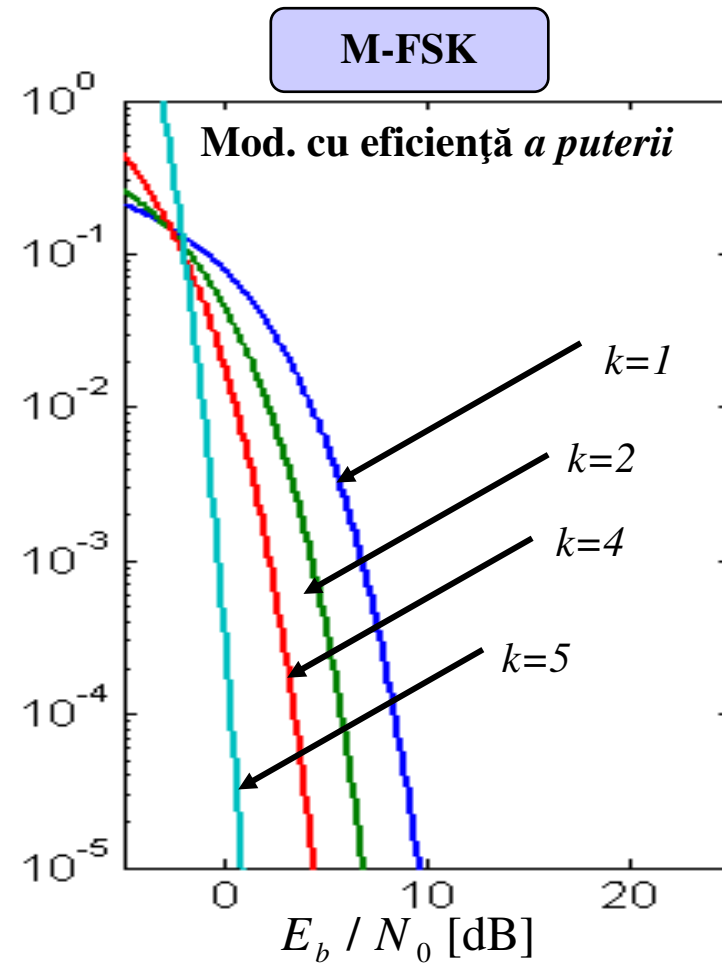
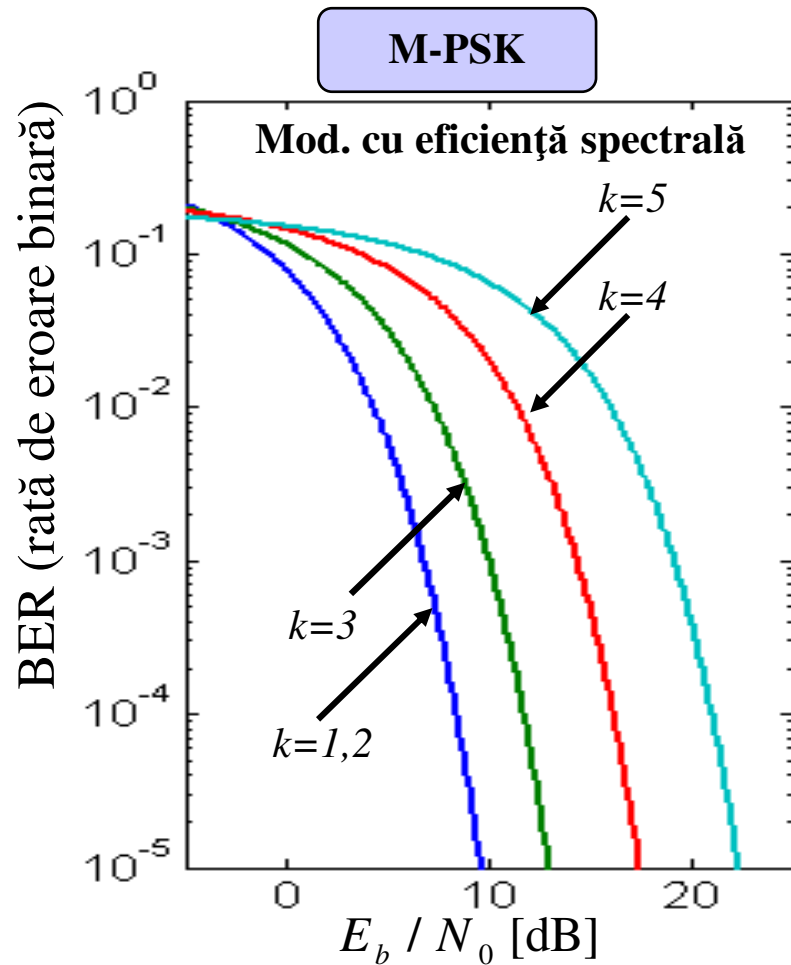
$$\frac{x}{\sqrt{2\pi}(1+x^2)} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} < Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$\text{pt } x > 3 \Rightarrow Q(x) \cong \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}x}$$

x	Q(x)	x	Q(x)	x	Q(x)	x	Q(x)	x	Q(x)
0.0	0.50000	1.0	0.15866	2.0	0.02275	3.0	1.350e-3	4.0	3.1671e-5
0.1	0.46017	1.1	0.13567	2.1	0.017864	3.1	9.676e-4	4.1	2.0658e-5
0.2	0.42074	1.2	0.11507	2.2	0.01390	3.2	6.8714e-4	4.2	1.3346e-5
0.3	0.38209	1.3	0.09680	2.3	0.010724	3.3	4.8342e-4	4.3	8.5399e-6
0.4	0.34458	1.4	0.080757	2.4	8.1975e-3	3.4	3.3693e-4	4.4	5.4125e-6
0.5	0.30854	1.5	0.066807	2.5	6.2096e-3	3.5	2.3263e-4	4.5	3.3977e-6
0.6	0.27425	1.6	0.0548	2.6	4.6612e-3	3.6	1.591e-4	4.6	2.1152e-6
0.7	0.24196	1.7	0.044565	2.7	3.467e-3	3.7	1.0780e-4	4.7	1.3008e-6
0.8	0.21186	1.8	0.03593	2.8	2.555e-3	3.8	7.2348e-5	4.8	7.9333e-7
0.9	0.18406	1.9	0.028717	2.9	1.866e-3	3.9	4.8096e-5	4.9	4.7918e-7
								5.0	2.8665e-7

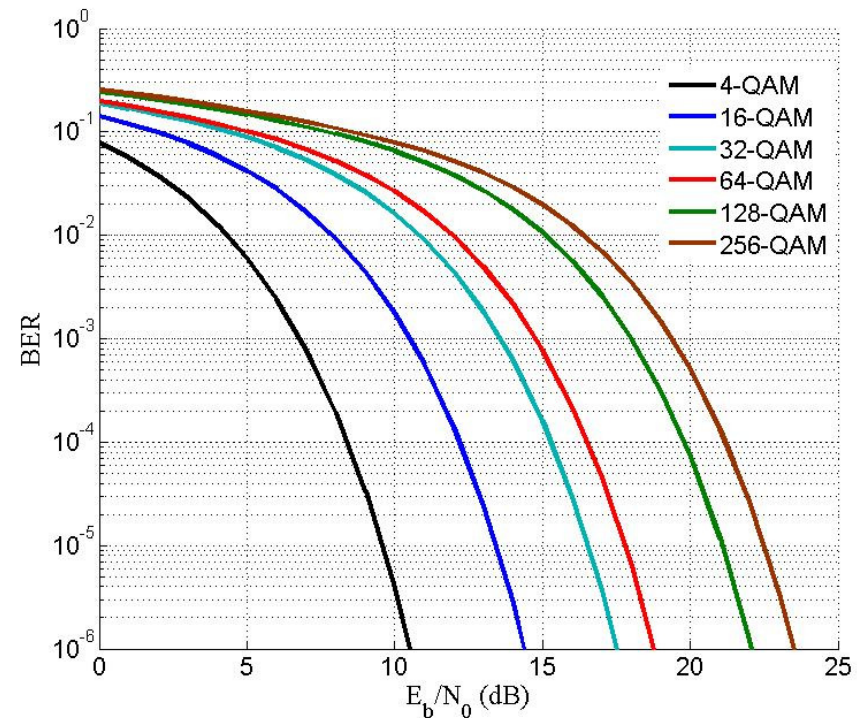
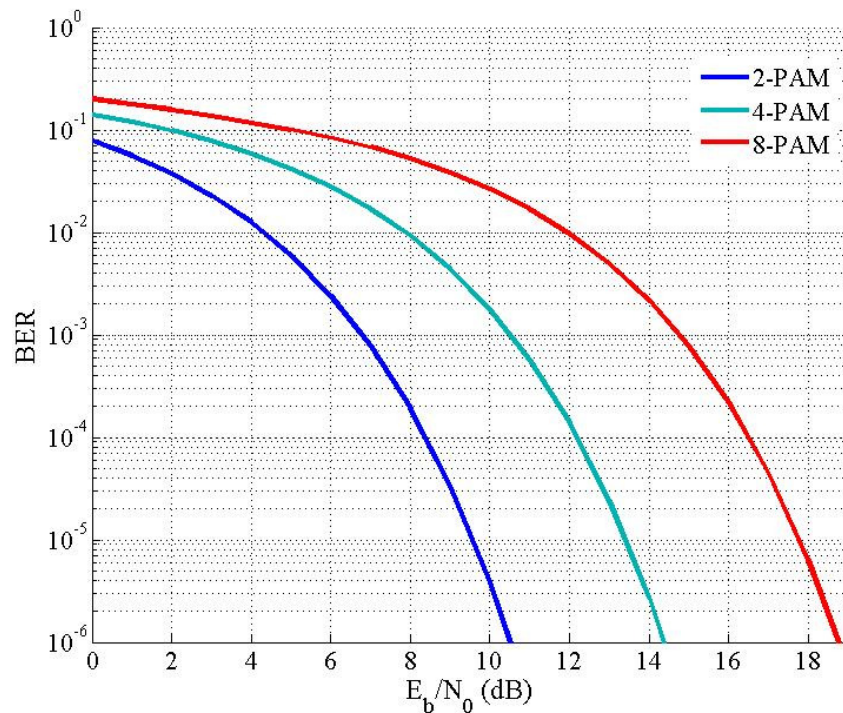
Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Exemple BER în funcție de SNR (per bit – E_b/N_0)



Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Exemple BER în funcție de SNR, modulații necodate
 - PAM = pulse amplitude modulation (anvelopa modulației ASK)
 - Echivalentul de joasă frecvență (BB) al unui semnal trece bandă are aceleași proprietăți BER. Spectrul lui este identic cu al unui semnal trece bandă, dar este centrat pe frecvența $f=0$ în loc de $f=f_C$;



Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Eficiența spectrală a modulațiilor digitale

- Indică debitul binar (R_b , D_b) care se transmite pe 1Hz din banda utilizată a canalului de transmisiune.

- Pentru modulații multinivel (M):
$$\eta = \frac{R_b}{W} = \frac{\log_2 M}{WT_s} = \frac{1}{WT_b} \quad [\text{bits/s/Hz}]$$

- Presupunând soluția de bandă minimă ($ISI=0$) pentru echivalentul de joasă frecvență, lățimea benzii pentru modulația de tip trece bandă este:

$$W = 1/T_s = R_s \quad [\text{Hz}]$$

- M-PSK, M-QAM, M-ASK – modulații pt sisteme de bandă limitată

$$R_b / W = \log_2 M \quad [\text{bits/s/Hz}]$$

- Eficiența spectrală crește odată cu creșterea lui M ;

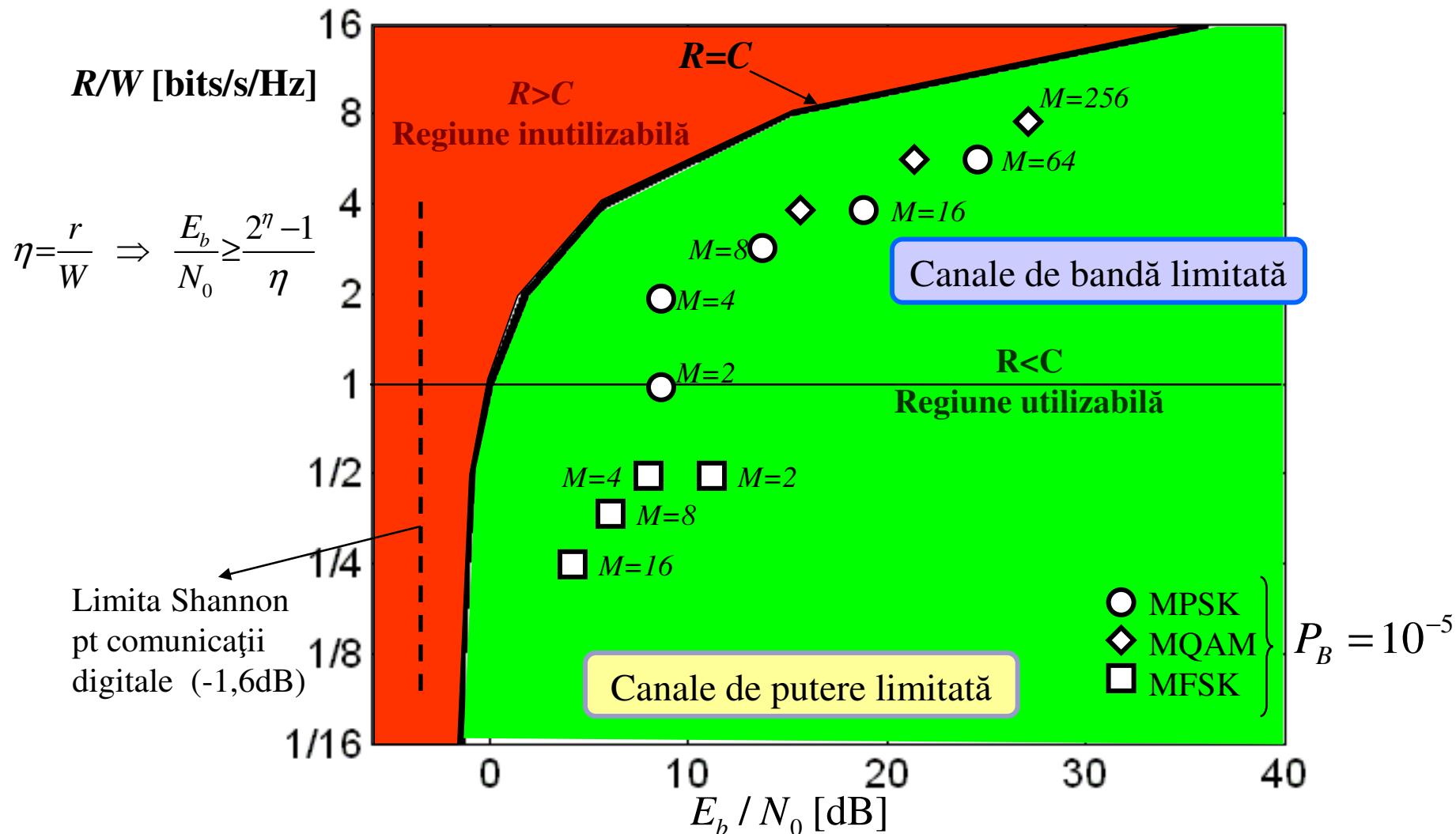
- M-FSK – modulații pt sisteme de putere limitată

$$R_b / W = \log_2 M / M \quad [\text{bits/s/Hz}]$$

- Eficiența spectrală scade cu creșterea lui M ;

Tehnici de transmisiune digitală a informației

- Eficiența spectrală a modulațiilor digitale



Tehnici de transmisiune digitală a informației

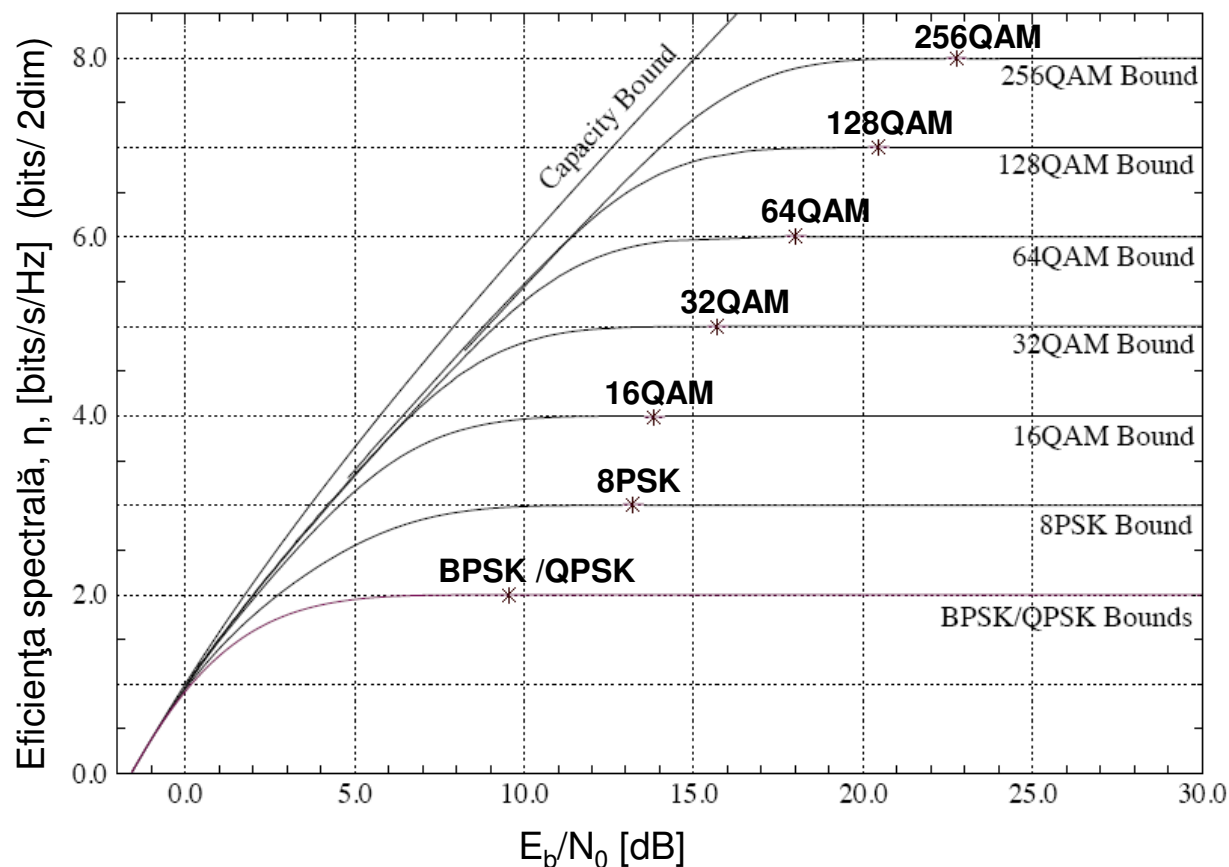
- Eficiența spectrală pt transmisiuni de bandă limitată

BER = 10^{-5}

Mod.	E_b/N_0	η
BPSK	9.6 dB	2
8PSK	12.8 dB	3
16QAM	13.5 dB	4
32QAM	16.6 dB	5
64QAM	17.9 dB	6
128QAM	20.9 dB	7
256QAM	22.8 dB	8

BER = 10^{-10}

Mod.	E_b/N_0	η
8PSK	16.8 dB	3
16QAM	17.2 dB	4



Eficiența spectrală a modulațiilor pentru BER = 10^{-5} ,
folosind semnale bidimensionale
(simbolurile se reprezintă în planul complex)

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▪ Aplicația 1

- Alegeți schema de modulație optimă (într-un sistem necodat), dacă la recepție trebuie să se atingă un $BER=10^{-5}$, în condițiile unui SNR, $P_r/N_0= 53\text{dB}\cdot\text{Hz}$, la ieșire filtrului adaptat, comunicația realizându-se cu debitul binar $D_b=9,6\text{kbps}$ printr-un canal AWGN cu banda $W_C=4\text{kHz}$ (cu impuls fără depășire de bandă).

Capacitatea canalului : $C = W_C \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_r}{N_0 \cdot W_C} \right) = 22,7\text{kbps} > D_b = R = 9,6\text{kbps}$

$R = D_b > W_C \Rightarrow$ modulație multinivel (canal de bandă limitată)

$$k = \left\lceil \frac{D_b}{W_C} \right\rceil + (1) = \left\lceil \frac{9,6}{4} \right\rceil + (1) = 3 \text{ biți per simbol} \Rightarrow M = 2^3 = 8$$

$$\Rightarrow R_s = \frac{D_b}{\log_2 M} = 3200 \text{ [simb/s]} < W_C = 4000 \text{ [Hz]}$$

$$\bullet M - PSK \text{ (8 - PSK)} \Rightarrow P_s \cong 2Q \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{N_0}} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \right) = 2Q \left(\sqrt{\frac{2 \cdot \log_2 8 \cdot P_r}{N_0 \cdot D_b}} \cdot \sin \frac{\pi}{8} \right) \cong 1,88 \cdot 10^{-5}$$

$$P_b \approx \frac{P_s(M)}{\log_2 M} = 6,3 \times 10^{-6} < 10^{-5} \Rightarrow \underline{\underline{8 - PSK \text{ este o soluție}}}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▪ Aplicația 1 (cont'd)

$$\begin{aligned} \bullet M - ASK \text{ (8-ASK)} &\Rightarrow P_s = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \cdot \varepsilon_{S \text{ av}}}{(M^2-1)N_0}} \right) \\ &= \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6 \cdot \log_2(M)}{(M^2-1)} \cdot \frac{P_r}{N_0 D_b}} \right) = 13 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BER = P_b \cong \frac{P_s}{\log_2(M)} = 4,3 \cdot 10^{-3} > 10^{-5} \Rightarrow 8-ASK \text{ nu este solutie}$$

$$\begin{aligned} \bullet M - QAM \text{ (16-QAM)} &\Rightarrow P_s = 1 - \left[1 - 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \cdot \frac{\varepsilon_{S \text{ av}}}{N_0}} \right) \right]^2 \\ \text{(ortogonala)} & \\ &= 1 - \left[1 - 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \cdot \log_2(M)}{M-1} \cdot \frac{P_r}{N_0 D_b}} \right) \right]^2 \cong 6,7 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BER = P_b \cong \frac{P_s}{\log_2(M)} = 1,67 \cdot 10^{-5} > 10^{-5} - 16-QAM \text{ nu este solutie}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▪ Aplicația 2

- Alegeți schema de modulație optimă (într-un sistem necodat), dacă la recepție trebuie să se atingă un $BER=10^{-5}$, în condițiile unui SNR, $P_r/N_0=48\text{dB}\cdot\text{Hz}$, la ieșire filtrului adaptat, comunicația realizându-se cu debitul binar $D_b=9,6\text{kbps}$ printr-un canal AWGN cu banda $W_C=45\text{kHz}$ (fără depășire de bandă).

$$\text{Capacitatea canalului : } C = W_C \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_r}{N_0 \cdot W_C} \right) = 56,9\text{kbps} > D_b = R = 9,6\text{kbps}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_r}{N_0} \frac{1}{R_b} = 6.61 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{\text{dB}} = 8.2 \text{ [dB]}$$

$D_b < W_C$ si E_b / N_0 mic \Rightarrow modulație multinivel (canal de putere limitată) \Rightarrow MFSK

$$k = [W_C / D_b] = [45 / 9,6] = 4 \text{ biți per simbol} \Rightarrow M = 2^4 = 16$$

$$\frac{\mathcal{E}_s}{N_0} = (\log_2 M) \frac{E_b}{N_0} = (\log_2 M) \frac{P_r}{N_0} \frac{1}{R_b} = 26.29$$

$$P_s = (M - 1) \cdot Q \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{N_0}} \right) = \frac{(M - 1)}{2} \cdot \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}_s}{2N_0}} \right) \cong 2,2 \cdot 10^{-6}$$

$$\Rightarrow BER = P_B \approx \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_E(M) = 1.18 \times 10^{-6} < 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \underline{16 - FSK \text{ este o soluție}}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▪ Aplicația 3

- Alegeți schema de modulație optimă (într-un sistem necodat), dacă la recepție trebuie să se atingă un $BER=10^{-5}$, în condițiile unui SNR, $P_r/N_0=46\text{dB}\cdot\text{Hz}$, la ieșirea filtrului adaptat, comunicația realizându-se cu debitul binar $D_b=9,6\text{kbps}$ printr-un canal AWGN cu banda $W_C=30\text{kHz}$ ($\alpha=0$).

Capacitatea canalului : $C = W_C \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_r}{N_0 \cdot W_C} \right) = 36,67\text{kbps} > D_b = 9,6\text{kbps}$ (cerinte realizabile)

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_r}{N_0 R_b} = 4.1667 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{\text{dB}} = 6.2 \text{ [dB]}$$

$D_b < W_C$ si E_b/N_0 mic \Rightarrow modulație multinivel (canal de putere limitată) \Rightarrow MFSK

$$k = \lceil W_C / D_b \rceil = \lceil 30 / 9,6 \rceil = 3 \text{ biți per simbol} \Rightarrow M = 2^3 = 8$$

$$\frac{\epsilon_s}{N_0} = (\log_2 M) \frac{E_b}{N_0} = (\log_2 M) \frac{P_r}{N_0 R_b} = 12.5$$

$$P_S = (M - 1) \cdot Q \left(\sqrt{\frac{\epsilon_s}{N_0}} \right) = \frac{(M - 1)}{2} \cdot \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_s}{2N_0}} \right) \cong 1,4 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow BER = P_B \approx \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_S(M) = 8.14 \times 10^{-4} > 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \underline{8-FSK \text{ nu este o solutie}}$$

\Rightarrow este necesara o schema de codare corectoare de eroare - un sistem cu modulatie necodata nu satisface cerintele impuse

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▪ Aplicația 4

Un sistem de comunicații digitale necodate, punct la punct, prin cablu, modulație BPSK, transmite informația pe distanța 200km. Pentru refacerea semnalului digital, din 2 în 2 km sunt amplasate ori repetoare analogice ori regeneratoare digitale. Determinați raportul dintre puterile de emisie dacă la recepție trebuie să se atingă un BER=10⁻⁵.

- pt utilizarea regeneratoarelor, probabilitatea de eroare și recepție corectă pe prima secțiune este: $P_{b\ err}$

$$P_{b\ err\ 1} = Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \text{ si } P_{corect\ 1} = 1 - P_{b\ err\ 1}$$

- Pt un lanț de K secțiuni, probabilitățile de recepție corectă și de eroare binară:

$$P_{corect\ K} = P_{corect\ 1}^K = (1 - P_{b\ err\ 1})^K = 1 - C_K^1 P_{b\ err\ 1} + C_K^2 P_{b\ err\ 1}^2 - \dots \cong 1 - K \cdot P_{b\ err\ 1} \Rightarrow P_{b\ err\ K} \cong K \cdot P_{b\ err\ 1}$$

Rezultă:

$$P_{b\ err\ K} \cong 100 \cdot P_{b\ err\ 1} = 100 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-5} \Rightarrow Q\left(\sqrt{\frac{2\mathcal{E}_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-7} \Rightarrow \left.\frac{\mathcal{E}_{b-d}}{N_0}\right|_{dB} \geq 11,3\text{dB}$$

Tehnici de transmisiune digitală a informației

▪ Aplicația 4 (cont'd)

- cazul utilizării unor repeatoare analogice:

- nu se refacere semnalul binar;
- se amplifică și zgomotul recepționat;
- puterea zgomotului crește proporțional cu nr. de secțiuni;

- probabilitatea de eroare binară după K secțiuni:

$$P_{b \text{ err } K} = Q\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_b}{K \cdot N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon_b}{100 \cdot N_0}}\right) \leq 10^{-5} \Rightarrow \left.\frac{\varepsilon_{b_a}}{N_0}\right|_{\text{dB}} \geq 29,6\text{dB}$$

- Puterea medie a semnalului emis:

$$P_{W_S} = \frac{1}{T_b} \cdot \varepsilon_b \cdot \text{atenuare}$$

- Raportul dintre puterile de emisie în sist. cu repeatoare și regeneratoare:

$$\left.\frac{P_{W_{S_a}}}{P_{W_{S_d}}}\right|_{\text{dB}} = \frac{\left.\frac{1}{T_b} \cdot \varepsilon_{b_a} \cdot \text{atenuare}\right|_{\text{dB}}}{\left.\frac{1}{T_b} \cdot \varepsilon_{b_d} \cdot \text{atenuare}\right|_{\text{dB}}} = 29,6\text{dB} - 11,3\text{dB} = 18,3\text{dB} \Rightarrow \frac{P_{W_{S_a}}}{P_{W_{S_d}}} \cong 70$$

Bibliografie

- I. Constantin. Principiile transmisiunilor de date. Ed Politehnica Press, 2002;
- Tutorials in Digital Communications, www.complextoreal.com/tutorial.htm
- J. Proakis, Digital Communications 4-th Ed., 2004.